Краткие сообщения по физике № 7, 8 — 1992 г.

УДК 533.9

ОБ ЭНЕРГИИ ПОЛЯ В СРЕДЕ С ДИССИПАЦИЕЙ

М.А. Микаэлян

В рамках модели осцилляторов выводится выражение для энергии поля в среде с диссипацией.

Осциллятор с затуханием является примером физической системы, для которой понятие энергии определено, несмотря на наличие диссипации. При этом взаимодействие осциллятора с окружающей средой описывается силой трения, что возможно лишь при условии малости частот его колебаний по сравнению с характерными частотами диссипативных процессов в среде /1/. Если у нас не один, а система осцилляторов, образующая среду, то это же условие на языке параметра порядка среды — поляризации **P** имеет вид

$$(\dot{P}/P)^{-1} \gg \{\tau\}, \tag{1}$$

где $\{\tau\}$ — характерные времена диссипативных процессов. Выполнение (1) означает, что установление термодинамического равновесия успевает следовать за изменениями параметра порядка **P**.

Другое условие, которое мы всюду будем предполагать выполненным, — это отсутствие пространственной дисперсии:

$$|\nabla P/P|^{-1} \gg a_0, \tag{2}$$

где a_0 — межатомное расстояние; атомы рассматриваются как осцилляторы одного сорта. Выполнение (2) позволит использовать понятие физически бесконечно малого объема, поляризованного однородно.

Ограничимся случаем однородной, изотропной, немагнитной диэлектрической среды.

Рассмотрим образец среды эллипсоидальной формы, в котором сторонней силой ("руками") квазистатически создается однородная поляризация **P**. Работу, совершаемую при этом, будем называть энергией поляризации $V(\mathbf{P})$. Последняя оказывается зависящей не только от типа среды, но и от формы образца:

$$V(\mathbf{P}) = V_0(\mathbf{P}) + 2\pi(n_x P_x^2 + n_y P_y^2 + n_z P_z^2), \tag{3}$$

где $V_0(\mathbf{P})$ — энергия поляризации эллипсоида типа "иголки" (или, что то же самое, —

бесконечного цилиндра), поляризованной вдоль своей оси*; n_x, n_y, n_z — деполяризующие факторы эллипсоида, через которые выражается поле **E** внутри него:

$$E_i^{dep} = -4\pi n_i P_i,\ i = x, y, z;\ n_x + n_y + n_z = 1 \tag{4}$$

(по i нет суммирования). Для получения (3) разобьем эллипсоид на "иголки", параллельные **P** (рис. 1). Тогда первому члену в (3) соответствует работа по поляризации этих "иголок", а трем другим — работа против общего для всего образца деполяризующего поля: $-\int E^{dep} dP$, где E^{dep} дается (4). $V_0(P)$ — это также энергия однородно поляризованной бесконечной среды*. Чтобы это понять, достаточно разбить последнюю на "иголки", параллельные **P**, и учесть, что в этом случае $E^{dep} = 0$ и дополнительная работа не производится. $V_0(P)$ может рассматриваться как первичная величина в феноменологическом описании среды, задаваемая своим степенным разложением в духе теории Ландау /2, 3/

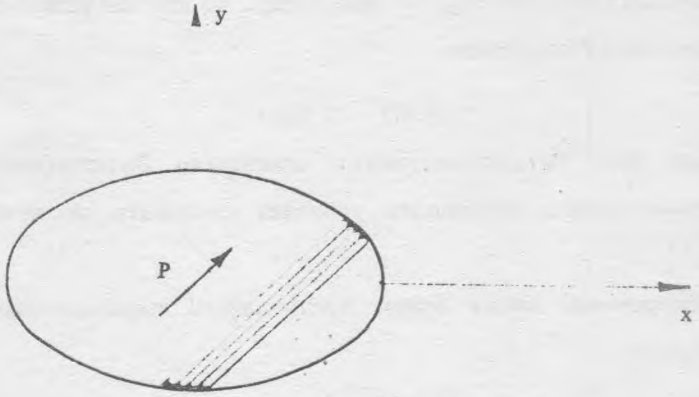

Рис. 1. Однородно поляризованный эллипсоид разбивается на "иголки", параллельные вектору поляризации P.

К энергии поляризации $V(P)$ можно прийти, создавая **P** не сторонней силой, а электрическим полем. При этом, однако, совершаются "лишние" работы, не относящиеся к поляризации как таковой, которые необходимо вычесть /4/: одна из них — энергия самого внешнего поля, другая, более замаскированная, — энергия внешних зарядов в деполяризующем поле среды (если последнее считать фиксированным). Величина $V(P)$ и ей аналогичная для магнитного случая тесно связаны с проблемой стабильности среды; эта связь в общем виде впервые была установлена Киржницем /4/.

---

* Все энергетические величины мы относим к единице объема.

Для рассматриваемой модели среды $V(P)$ — сумма потенциальной энергии одинаково растянутых осцилляторов и энергии их диполь-дипольного взаимодействия; последнее, будучи дальнодействующим, и порождает зависимость $V(P)$ от формы образца. Добавив к $V(P)$ кинетическую энергию ($\propto \dot{P}^2$), получим энергию поляризации $V(P, \dot{P})$ * — функцию Гамильтона системы осцилляторов, выраженную только через P и $\dot{P}$. Последнее правомерно, если можно пренебречь излучением /6/, что, в свою очередь, имеет место в пределе малых размеров образца. В этом пределе E^{dep} (4) "поспевает" за изменениями P и, как и в статике, имеем:

$$V(P, \dot{P}) = V_0(P, \dot{P}) + 2\pi(n_x P_x^2 + n_y P_y^2 + n_z P_z^2); \tag{5}$$

$$V_0(P, \dot{P}) = V_0(P) + \mu\dot{P}^2/2. \tag{6}$$

Рассматривая электромагнитное поле в среде, выделим в ней бесконечно малый эллипсоид. Внешним по отношению к нему полем E^{ex} является то поле, которое в случае изъятия его из среды возникло бы в образовавшейся полости. E^{ex} в сумме с E^{dep} (4) дает полное E:

$$E_i^{ex} = E_i + 4\pi n_i P_i,\ i = x, y, z. \tag{7}$$

За время dt поле E^{ex} совершает над эллипсоидом работу $E^{ex}\,dP$; она идет на изменение энергии $V(P, \dot{P})$ и на тепловыделение $2F(\dot{P})dt$, где $F(\dot{P}) \propto \dot{P}^2$ — диссипативная функция одного осциллятора, помноженная на их концентрацию**:

$$E^{ex}dP = dV(P, \dot{P}) + 2F(\dot{P})dt, \tag{8а}$$

$$F(\dot{P}) = \gamma\dot{P}^2/2. \tag{8б}$$

Подставив (7) и дифференциал (5) в (8а), разделив на dt, получим материальное уравнение (МУ) среды:

$$E\dot{P} = \frac{dV_0(P, \dot{P})}{dt} + 2F(\dot{P}); \tag{9}$$

---

* Математически строгим выражением процедуры усреднения по физически бесконечно малому объему (или пренебрежения пространственной дисперсией, что то же самое /5/) может служить предельный переход для $V(P, \dot{P})$: межатомное расстояние (оно же — характерный размер пространственной дисперсии) $a_0 \to 0$, поляризуемость, масса и заряд осцилляторов κ, m, $e \to 0$; при этом $\kappa/a_0^3 = \text{const}$, $e^2/ma_0^3 = \text{const}$.

** Раздельное рассмотрение тепловой энергии и энергии поляризации возможно благодаря (1). Говорить об энергии элемента объема $V(P, \dot{P})$ безльносительно к значениям P вне его можно, ввиду отсутствия пространственной дисперсии (см. (2) и предыдущую сноску).

с учетом (6) и (8б) перепишем (9):

$$E = \frac{dV_0(P)}{dP} + \mu\ddot{P} + \gamma\dot{P}. \tag{10}$$

В такой (локальной по времени) форме МУ среды с временной дисперсией впервые было написано Гинзбургом /2/ применительно к сегнетоэлектрику и имело вид (10) с $V_0(P) = -aP^2/2 + bP^4/4$. В связи со сказанным отметим, что МУ в обычной форме $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, или, что то же самое,

$$P(t) = \hat{\alpha}E = \int_{-\infty}^{t}\tilde{\alpha}(t-t')E(t')dt',\ P_\omega = \alpha(\omega)E_\omega, \tag{11}$$

описывает (по определению) отклик среды лишь на чисто электромагнитное воздействие и теряет силу при наличии в предыстории сторонних воздействий. Так, оно, вообще говоря, не применимо к процессу релаксации флуктуаций $\mathbf{P}$, так как само их возникновение есть результат действия случайных сил, физическая природа которых произвольна. Напротив, МУ (9) справедливо в любой момент времени, если в этот же мемент сторонние воздействия на среду отсутствуют (наличие их в предыстории допустимо).

В точках среды, где $\mathbf{j}^{ex} = 0$, уравнения Максвелла дают:

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}/4\pi + \mathbf{H}\dot{\mathbf{H}}/4\pi + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0,\ \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}]. \tag{12}$$

Записав $\mathbf{E}\dot{\mathbf{D}}/4\pi = \mathbf{E}\dot{\mathbf{E}}/4\pi + \mathbf{E}\dot{\mathbf{P}}$ и воспользовавшись МУ (9), перепишем (12) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} + V_0(\mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}})\right] + 2F(\dot{\mathbf{P}}) + \operatorname{div}\mathbf{S} = 0; \tag{13}$$

тепловыделение $2F(\dot{\mathbf{P}})$ входит в уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u_T}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{J} = 2F, \tag{14}$$

где $\mathbf{J} = -\chi\nabla T$. С учетом (14), запишем (13) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} + V_0(\mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}}) + u_T\right] + \operatorname{div}(\mathbf{S} + \mathbf{J}) = 0, \tag{15}$$

откуда следует, что за энергию поля следует принять величину

$$u = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} + V_0(\mathbf{P}, \dot{\mathbf{P}}). \tag{16}$$

В частности, для линейной среды (см. (6) с $V_0(P) \propto P^2$) имеем:

$$u = \frac{E^2}{8\pi} + \frac{H^2}{8\pi} + a\frac{P^2}{2} + \mu\frac{\dot{P}^2}{2}. \tag{17}$$

Коэффициенты a и μ можно выразить через $\alpha(\omega)$, которая равна (см. (6) с $V_0(P) = aP^2/2$):

$$\alpha(\omega) = 1/(a - \mu\omega^2 - i\gamma\omega).$$

Для этого, поместив среду в конденсатор, подействуем на нее в интервале времени $-\infty < t \leqslant 0$ двумя способами: 1) $E = E_0 e^{\lambda t}$, $\lambda \to 0$; 2) $E = C\delta(t)$. Согласно (11), при $t = +0$ имеем, соответственно: 1) $P = \alpha(0)E_0$, $\dot{P} = 0$; 2) $P = 0$, $\dot{P} = C\dot{\tilde{\alpha}}(0)$. В обоих случаях тепловыделение $\int_{-\infty}^{+0} 2F(\dot{P})\,dt = 0$ (см. (8б)), и (9) дает: $V_0(P, \dot{P}) = \int_{-\infty}^{+0} E\dot{P}dt$. Посчитав этот интеграл для обоих случаев с использованием (11) и сравнив с (17), получим:

$$a = 1/\alpha(0),\ \mu = 1/\dot{\tilde{\alpha}}(0) = 1/2\int_0^\infty \omega\alpha''(\omega)\,d\omega;\ \alpha'' = \mathrm{Im}\,\alpha.$$

Отметим, что выражение для энергии (16) является очевидным для того случая, когда можно пренебречь разницей между действующим на осциллятор и средним полем E /7, 8/. В этом случае $E^2/8\pi$ — это энергия внешнего по отношению к осцилляторам поля, а $V_0(P,\dot{P})$ — энергия самих осцилляторов, движение которых вызвано полем.

Нетрудно проверить, что в отсутствие диссипации ($\gamma = 0$) в монохроматическом случае после усреднения по периоду (17) принимает бриллюэновский вид

$$\overline{u} = \frac{d(\omega\epsilon)}{d\omega}\frac{\overline{E}^2}{8\pi} + \frac{\overline{H}^2}{8\pi},\ \epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega).$$

Автор признателен Киржницу Д.А., общение с которым побудило к рассмотрению изложенных выше вопросов. Автор благодарит Игнатова А.М. и Макарова В.П. за полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. М., Наука, 1973.
2. Гинзбург В.Л. ЖЭТФ, **15**, 739 (1945); ЖЭТФ, **19**, 36 (1949).
3. Киржниц Д.А., Микаэлян М.А. ЖЭТФ, **97**, 795 (1990).
4. Киржниц Д.А. УФН, **119**, 357 (1976); УФН, **152**, 399 (1987).
5. Агранович В.М., Гинзбург В.Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. М., Наука, 1965.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М., Наука, 1973.
7. Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. М., Наука, 1981.
8. Сивухин Д.В. Лекции по физической оптике, ч. 1. Новосибирск, 1968.

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 23 июня 1992 г.