Краткие сообщения по физике № 9, 10 — 1992 г.

УДК 530.145

О СТОХАСТИЧЕСКОМ КВАНТОВАНИИ ТЕОРИЙ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. Мусаев, А. Субботин

Путем введения подвижных реперов корректно построен стохастический процесс на римановых многообразиях для определенной полевой теории. В неравновесной фазе такой процесс адекватен топологической сигма-модели Виттена. Получен полностью ковариантный, БРТС-симметричный лагранжиан теории.

Задача о корректном построении диффузионных стохастических процессов на римановых многообразиях была решена в начале 70-х в работах /1/. Главным требованием (и основной трудностью) в решении этой задачи было требование сохранения ковариантности рассматриваемой теории при включении источника случайной силы η^{μ}. В самом деле, корреляторы шумов, задающих стохастическую динамику, с одной стороны не могут зависеть от выбора локальных координат x на многообразии (которые сами являются "субъектом" случайного блуждания), а с другой — эта зависимость от координат необходима для сохранения ковариантности в неравновесной фазе теории.

Основой подхода, предложенного в работах /1/, явилось введение в теорию новой динамической переменной — *подвижного репера.* При этом "интуитивные" стохастические уравнения Ланжевена

$$x^{\mu} - V^{\mu}(x) = \eta^{\mu}, \quad \langle\eta^{\mu}\eta^{\nu}\rangle = g^{\mu\nu}(x), \tag{1}$$

где $g^{\mu\nu}$ и $V^{\mu}(x)$ суть соответственно риманова метрика и регулярная сила, переписываются как *система* уравнений в терминах стохастических дифференциалов:

$$\begin{gathered} dx^{\mu} - V^{\mu}(x) = e^{\mu}_{a}dw^{a}, \\ de^{\mu}_{a} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}e^{\nu}_{a}dx^{\lambda} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь w^{a} — стандартный винеровский процесс, e^{μ}_{a} — подвижный репер, $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ — риманова связность.

Если начальные условия для подвижных реперов задаются сообразно их метрической интерпретации, нетрудно показать, что *в среднем* трактовка переменных e^{μ}_{a} в качестве стандартного репера справедлива и в любой последующий момент времени. В силу этого, несмотря на явную зависимость от выбора базиса, уравнения (2) в действительности задают ковариантную динамику. В частности, легко показать, что роль гамильтониана Фоккера — Планка в даном случае играет (при выботе $V = 0$ для интерпретации Стратоновича) обычный ковариантный лапласиан.

Лагранжиан, соответствующий такой теории, был выписан в работе /2/ (там же обсуждается вопрос о корректном определении меры в континуальном интеграле в рамках предложенного формализма). Действие теории принимает наиболее простой вид в случае, когда дифференциалы в уравнениях системы (2) принимаются в смысле Стратоновича:

$$L = \frac{1}{2} B_{\mu} B_{\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} + B_{\mu}(x^{\mu} - V^{\mu}) + D^{a}_{\mu} \mathcal{D}_{\tau} e^{\mu}_{a}$$
$$- \bar{\Lambda}_{\mu}(\mathcal{D}_{\tau}\Lambda^{\mu} - \nabla_{\rho} V^{\mu} \Lambda^{\rho} - \xi^{\mu}_{a} e^{a}_{\rho}(\dot{x}^{\rho} - V^{\rho})) - \xi^{a}_{\mu}(\mathcal{D}_{\tau}\xi^{\mu}_{a} + R^{\mu}_{\alpha\beta\lambda}\dot{x}^{\lambda} e^{\alpha}_{a}\Lambda^{\beta}). \qquad (3)$$

Введенные здесь добавочные поля B_{μ}, D^{a}_{μ} и госты обеспечивают линейную реализацию соответствующей алгебры суперсимметрии. Символ $\mathcal{D}$ обозначает ковариантную временную производную.

Нетрудно, однако, заметить, что данная модель (как и уравнения (2)) не допускает очевидного обобщения на теоретико-полевой случай. В частности, с точки зрения стохастического квантования /3/, предполагающего наличие в V^{μ} членов, пропорциональных производным полей по пространственным координатам, сектор теории, обусловленный введением подвижного репера, таких членов не содержит. Вследствие этого пропагаторы указанного сектора плохо определены, и теория является несостоятельной в пертурбативном смысле.

Целью настоящей статьи является корректное определение диффузии на римановом многообразии в теоретико-полевом случае. Мы покажем, что такое определение возможно по крайней мере для стохастически квантованных теорий типа Черна — Саймонса, и опишем пертурбативные свойства соответствующего лагранжиана в однопетлевом приближении.

Для простоты дальнейшее рассмотрение проводится для одномерного действия топологической частицы на кэлеровом многообразии.

Пусть M — кэлерово многообразие с эрмитовой метрикой g и комплексной структурой J, а Σ —

плоская риманова поверхность, параметрированная координатами (σ, τ). Поля x есть гладкие отображения $\Sigma \to M$. Действие теории есть интеграл по некоторой поверхности $S \in M$:

$$\int_s J.$$

Как показано в /4/, при определенных ограничениях на выбор J и S, *на формальном уровне* стохастическое квантование теории приводит в неравновесной фазе* к варианту топологической сигма-модели Виттена /5/. Для наших целей достаточен выбор точной кэлеровой формы $J = dA$, когда действие модели сводится к голономии A вдоль некоторого замкнутого контура Г:

$$\oint_\Gamma dA. \tag{4}$$

Метод стохастического квантования подразумевает пропорциональность V вариационной производной рассматриваемого действия. Вычисляя вариационные производные, нетрудно убедиться, что единственно возможной формулировкой "грубых" уравнений Ланжевена для теории (4) будут уравнения

$$\partial_\tau x^\mu + J^\mu_\nu \partial_\sigma x^\nu = \eta^\mu, \tag{5}$$

выражающие условие самодуальности на мировом листе с точностью до случайного источника.

Заметим теперь, что переход к "правильной" ковариантной формулировке здесь так же реален, как и переход от (1) к (2) в случае квантовой механики. Следуя /1, 2/, второе уравнение ковариантной стохастической динамики может быть получено однозначно исходя из требования параллельности переноса гауссовых шумов η^a вдоль стохастических траекторий. Примечательно то, что в нашем случае варьирование матрицы переноса

$$O^a_b = (P \exp \int_{x_0}^{x(t)} \Omega_\mu dx^\mu)^a_b,$$

где Ω_μ — лоренцевы связности, приводит к появлению во втором уравнении (2) недостающих членов с пространственными производными. Результат ковариантизации (5) имеет вид:

$$\begin{aligned} dx^\mu + J^\mu_\nu \partial_\sigma x^\nu d\tau &= e^\mu_a dw^a \\ \mathcal{D} e^\mu_a + J^\mu_\nu D_\sigma e^\nu_a d\tau &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

---

* Равновесное распределение здесь отсутствует.

где *ковариантный* стохастический дифференциал $\mathcal{D}$ и ковариантная производная D_σ определяются стандартным образом в терминах независящих от подвижных реперов связностей.

Более того, для интерпретации стохастических дифференциалов в смысле Стратоновича, возможна ковариантизация системы по двумерным индексам $\imath = (\sigma, \tau)$. При этом (6) приобретают смысл уравнений, описывающих стохастическую эволюцию в *реальном* времени для некоторой двумерной сигма-модели.

Возможность ковариантного обобщения возникает прежде всего благодаря упоминавшемуся выше основному свойству динамики подвижных реперов

$$\langle g^{\mu\nu}(x)\rangle = \langle e^\mu_a e^\nu_a\rangle, \tag{7}$$

справедливому для любого момента стохастического времени. Нетрудно убедиться, что в силу этого свойства корреляторы "самодуальных" шумов η^a_i, удовлетворяющих равенству

$$e^\mu_a \eta^a_i + \epsilon_{ij} J^\mu_\nu e^\nu_a \eta^a_j = 0,$$

сохраняют гауссову структуру, коль скоро корреляторы их единственной независимой компоненты были выбраны гауссовыми. Имея в виду использование дифференциалов Стратоновича, ковариантный аналог (6) запишется как

$$\begin{gathered} \partial_i x^\mu + \epsilon_{ij} J^\mu_\nu \partial_j x^\nu = e^\mu_a \eta^a_i \\ D_i e^\mu_a + \epsilon_{ij} J^\mu_\nu D_j e^\nu_a = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Таким образом, свойство (7), являющееся гарантом сохранения самодуальности в процессе стохастической эволюции, дает возможность рассматривать неравновесную динамику теории как результат интерференции стохастических процессов вдоль двух пространственно-временных направлений. Конкретизация граничных условий и переход к гамильтоновой формулировке в данном случае есть просто ликвидация произвола в выборе независимой компоненты самодуального случайного источника.

Уравнения (8) являются основой для построения соответствующей функциональной формулировки. Не вдаваясь в детали процедуры перехода к континуальному представлению (подробности можной найти в работе /2/), выпишем лагранжиан, соответствующий системе (8).

Полевой состав теории копирует (3) с той лишь разницей, что добавочные нединамические поля и соответствующие им духи являются самодуальными. Как и в квантово-механическом случае, возможна суперполевая реализация: после введения суперполей

$$\hat{x}^{\mu} = x^{\mu} + \vartheta\Lambda^{\mu}$$
$$\hat{B}_{\mu i} = \bar{\Lambda}_{\mu i} + \vartheta B_{\mu i}$$
$$\hat{e}^{\mu}_{a} = e^{\mu}_{a} + \vartheta\xi^{\mu}_{a}$$
$$\hat{H}^{a}_{\mu i} = \bar{\xi}^{a}_{\mu i} + \vartheta H^{a}_{\mu i}$$

окончательное выражение для суперполевого лагранжиана нашей теории примет вид ("шляпки" над суперполями здесь и в дальнейшем мы опускаем):

$$L = \int d\vartheta \ \frac{1}{2}(e^{\mu}_{a}B_{\mu i})\,\partial_{\vartheta}(e^{\nu}_{a}B_{\nu i}) + B_{\mu i}\partial_{i}x^{\mu} + H^{a}_{\mu i}D_{i}e^{\mu}_{a}. \tag{9}$$

Как видно из последней формулы, действие теории имеет большое сходство с суперполевым действием топологической сигма-модели Виттена, выписанным в работе Хорна /6/. Несмотря на различный полевой состав двух теорий, единственным существенным отличием является присутствие в (9) дополнительного члена, обеспечивающего выполнение тождества (7). С точки зрения теории (9) тождество (7) есто тождество Уорда, связывающее функции Грина различных операторов теории. В то же время, последний член в правой части уравнения (9) может рассматриваться как член, фиксирующий калибровку: в данном случае калибровочный произвол — в локальной смене ориентации базиса $e \to M(x)e$, $M^{T}M = 1$ на многообразии полей x.

Компактный вид выражения (9) позволяет развить удобный суперполевой формализм теории возмущений. Пропагаторы теории

$$\langle xx\rangle \sim \partial_{\vartheta}/\partial^{2}, \quad \langle He\rangle \sim \langle Bx\rangle \sim (\partial_{i} + J\epsilon_{ij}\partial_{j})/\partial^{2}$$

хорошо определены и могут использоваться для расчетов квантовых поправок к действию методом фонового поля. Здесь мы приведем лишь основные результаты расчетов в однопетлевом приближении (подробности будут опубликованы в другой работе):*

1.В однопетлевом приближении теория является перенормируемой.

2.Перенормировка комплексной структуры совпадает с перенормировкой комплексной структуры в топологической сигма-модели, полученной в работе /6/.

3.Перенормировка подвижных реперов совпадает (с точностью до множителя 1/2) с перенормировкой метрики в работе /6/, что является свидетельством справедливости тождества Уорда (7) на однопетлевом уровне.

4. В (Н — е)-секторе теории возникает дополнительный контрчлен ~ H^2, пропорциональный квадрату кривизны.

Авторы благодарны проф. В. Я. Файнбергу за многочисленные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Malliavin P. Comp. Rend. A. Sc. Paris., **285**, 789 (1977). Ellworthy K. D. Stochastic dynamical systems and their flows, N. Y., Academic Press, 1978.

2. Fainberg V. Ya., Kuznetsov A. N., Subbotin A. V., будет опубликовано.

3. Parisi G., Wu Y.-S. Scientia Sinica, **24**, 483 (1981).

4. Fainberg V. Ya., Kuznetsov A. N., Subbotin A. V. On the Stochastic Dynamics of Topological Sigma Models, Lebedev Inst. Preprint, No. 208, 1990.

5. Witten E. Commun. Math. Phys., **118**, 411 (1988).

6. Horne J. Nucl. Phys., **B318**, 22 (1989).

Поступила в редакцию 22 июля 1992 г.

* В расчетах методом фонового поля нами использовалась размерная регуляризация.