Краткие сообщения по физике № 9, 10 — 1992 г.

УДК 530.145

ПЕРЕНОРМИРОВКИ В СТОХАСТИЧЕСКИ КВАНТОВАННЫХ ТЕОРИЯХ НА МНОГООБРАЗИЯХ

С. Мусаев, А. Субботин

Проведено исследование на однопетлевом уровне построенной ранее авторами стохастической теории на многообразиях. Перенормировки метрического тензора и почти комплексной структуры совпали с известными уже результатами для топологической сигма-модели Виттена. Показана перенормируемость теории на однопетлевом уровне.

В работах /1/ был предложен ковариантный формализм для описания стохастической динамики на римановых многообразиях. Основой метода явилось введение в теорию новой динамической переменной — *подвижного репера*. "Наивные" стохастические уравнения Ланжевена

$$\dot{x}^{\mu} - V^{\mu}(x) = \eta^{\mu}, \quad \langle \eta^{\mu} \eta^{\nu} \rangle = g^{\mu\nu}(x),$$

где $g^{\mu\nu}$ и $V^{\mu}(x)$ суть риманова метрика и регулярная сила, переписываются при этом как *система* уравнений в терминах стохастических дифференциалов:

$$dx^{\mu} - V^{\mu}(x) = e^{\mu}_{a} d\omega^{a},$$

$$de^{\mu}_{a} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} e^{\nu}_{a} dx^{\lambda} = 0. \qquad (1)$$

Здесь ω^{a} — стандартный винеровский процесс, e^{μ}_{a} — подвижный репер, $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ — риманова связность.

Лагранжиан, соответствующий этой теории, был выписан в работе /2/. В интерпретации Стратоновича действие теории имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} B_{\mu} B_{\nu} g^{\mu\nu} + B_{\mu}(\dot{x}^{\mu} - V^{\mu}) + D^{a}_{\mu} \mathcal{D}_{\tau} e^{\mu}_{a} -$$

$$- \bar{\Lambda}_{\mu}(\mathcal{D}_{\tau} \Lambda^{\mu} - \nabla_{\rho} V^{\mu} \Lambda^{\rho} - \xi^{\mu}_{a} e^{a}_{\rho}(\dot{x}^{\rho} - V^{\rho})) -$$

$$- \bar{\xi}^{a}_{\mu}(\mathcal{D}_{\tau} \xi^{\mu}_{a} + R^{\mu}_{\alpha\beta\lambda} \dot{x}^{\lambda} e^{\alpha}_{a} \Lambda^{\beta}).$$

Введенные здесь добавочные поля B_{μ}, D^{a}_{μ} и госты обеспечивают линейную реализацию соответствующей алгебры суперсимметрии. Символ $\mathcal{D}$ обозначает ковариантную временную производную.

Уместно отметить, что для потенциальных V^{μ}, т.е. таких, что

$$V^{\mu} = g^{\mu\nu}\partial_{\nu}S$$

для некоторого S, уравнения (1) находят естественную интерпретацию в рамках формализма *стохастического квантования* /3/ и описывают стохастически квантованную нуль-мерную теорию с действием S(x) на римановом многообразии.

В работе /4/ было дано обобщение метода подвижных реперов на случай теории поля. Было показано, что такое обобщение возможно по крайней мере для стохастически квантованных теорий типа Черна — Саймонса. Так, для топологической частицы на римановом многообразии имеет смысл рассматривать неравновесную динамику соответствующей двумерной сигма-модели как результат интерференции стохастических процессов вдоль двух пространственно-временных направлений. Конкретный выбор граничных условий и переход к гамильтоновой формулировке ведет к ликвидации произвола в выборе независимой компоненты самодуального случайного источника η^{μ}_{i} в первом из ковариантных уравнений системы

$$\begin{gathered} dx^{\mu} + J^{\mu}_{\nu}\partial_{\sigma}x^{\nu}d\tau = e^{\mu}_{a}d\omega^{a} \\ \mathcal{D}e^{\mu}_{a} + J^{\mu}_{\nu}D_{\sigma}e^{\nu}_{a}d\tau = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь J есть комплексная структура на многообразии, $\mathcal{D}$ — ковариантный стохастический дифференциал, а ковариантная производная D_{σ} определяется стандартным образом в терминах независящих от подвижных реперов связностей.

Теперь нетрудно получить лагранжиан, соответствующий системе (2). На суперполевом языке он имеет вид:

$$L = \int d\vartheta \frac{1}{2}(e^{\mu}_{a}B_{\mu i})\partial_{\vartheta}(e^{\nu}_{a}B_{\nu i}) + B_{\mu i}\partial_{i}x^{\mu} + H^{a}_{\mu i}D_{i}e^{\mu}_{a}, \tag{3}$$

где x^{μ}, e^{μ}_{a}, $H^{a}_{\mu i}$ и $B_{\mu i}$ зависят дополнительно от грассмановой переменной ϑ.

Целью настоящей работы является исследование квантовых поправок к действию (3) в однопетлевом приближении.

Естественным формализмом для пертурбативных вычислений в данной теории является ковариантный вариант метода фонового поля (см., например, /5/).

Займемся ковариантным разложением в теории (3) на фоне произвольной полевой конфигурации. Квантовые добавки к классическим полям $\phi^{cl} = x^\mu,\ e^\mu_a,\ H^a_{\mu i},\ B_{\mu i}$ обозначим $\phi^q = \xi^\mu$, $e^\mu_a,\ h^a_{\mu i},\ b_{\mu i}$. В однопетлевом приближении достаточно вычислить члены в разложении до второго порядка по квантовым полям включительно:

$$L^{(2)} = \int d\vartheta b^2 F_1(\phi^q) + b\xi F_2(\phi^q) + heF_3(\phi^q) + F_4(\phi^q), \tag{4}$$

где $F_4(0) = 0$.

Далее стандартной процедурой перехода к плоским индексам можно выделить всю зависимость от классических полей в последний член разложения и получить выражения для пропагаторов теории:

$$\langle\xi\xi\rangle = \partial_\vartheta/\partial^2, \quad \langle he\rangle = \langle b\xi\rangle = (\partial_i + J\epsilon_{ij}\partial_j)/\partial^2.$$

Для вычисления расходимостей теории мы используем метод размерной регуляризации, проводя расчеты в пространстве размерности $2 - \epsilon$ ($\epsilon \to 0$ в пределе снятия регуляризации). Опуская утомительные выкладки со спариваниями квантовых полей в последнем члене (4), приведем окончательный вид контрчленов, обеспечивающих конечность теории в заданном приближении:

$$\delta L^{(2)} = (4\pi\epsilon)^{-1}\int d\vartheta H^\alpha_{\mu i} e^\omega_a R^{\mu\rho\nu}_\omega \partial_\vartheta (H^b_{\kappa i} e^\alpha_b R^\kappa_{\alpha\rho\nu}) +$$

$$+ (2\pi\epsilon)^{-1}\int d\vartheta H^\alpha_{\mu i}\nabla^\nu R^\mu_{\omega\nu\rho} e^\omega_a \partial_i X^\rho + (2\pi\epsilon)^{-1}\int d\vartheta R_{\mu\nu} B^\mu_i \partial_i X^\nu. \tag{5}$$

Как видно из полученной формулы, необходима перенормировка метрики и комплексной структуры:

$$\delta g_{\mu\nu} = \delta J_{\mu\nu} = \frac{1}{2\epsilon} R_{\mu\nu},$$

где $R_{\mu\nu}$ есть тензор Риччи. Последний член в (5), однако, не имеет непосредственного аналога в лагранжиане (3). Несмотря на кажущуюся неперенормируемость, возникновение этого члена легко объяснимо с точки зрения "калибровочных" свойств классической теории. В самом деле, последний член лагранжиана является членом фиксации калибровки (в данном случае калибровочный произвол связан с инвариантностью относительно поворотов реперов $e \to M(x)e$, $M^T M = 1$ на многообразии полей x). С тем же успехом с самого начала можно было бы использовать калибровку более общего вида. Локальный выбор однозначен и сводится к добавлению члена αH^2 в исходный лагранжиан. Таким образом можно объяснить появление "чужеродного" контрчлена при $\alpha = 0$ и восстановить мультипликативную перенормируемость теории.

Появление на квантовом уровне контрчлена $\sim H^2$ приводит к интересным следствиям, если рассматривать теорию с точки зрения уравнения Ланжевена. Действительно, этот факт означает необходимость введения шумов в правую часть второго из уравнений системы. Для того, чтобы получить последовательную квантовую теорию, корреляторы шумов для полей e^μ_a нужно выбирать нетривиальными уже на классическом уровне. В этом состоит основной результат данной работы.

Перенормировка подвижных реперов совпадает (с точностью до множителя 1/2) с перенормировкой метрики в работе /6/.

Перенормировка комплексной структуры также совпадаст с перенормировкой комплексной структуры в топологической сигма-модели, полученной в работе /6/.

Авторы благодарны проф. В.Я. Файнбергу за многочисленные обсуждения и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. M a l l i a v i n P., Comp. Rend. A. Sc. Paris., **285**, 789 (1977). E l l w o r t h y K.D., Stochastic dynamical systems and their flows, N. Y., Academic Press, 1978.

2. F a i n b e r g V.Ya., K u z n e t s o v A.N., S u b b o t i n A.V., будет опубликовано.

3. P a r i s i G., W u Y.-S., Scientia Sinica, **24**, 483 (1981).

4. М у с а е в С., С у б б о т и н А. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 9, 10, 52 (1992).

5. A l v a r e z - G a u m e L., F r e e d m a n D.Z., M u k h i S. Ann. of Phys., **134**, 85 (1981). M u k h i S. Nucl. Phys., **B264**, 640 (1986).

6. H o r n e J. Nucl. Phys., **B318**, 22 (1989).

Поступила в редакцию 22 июля 1992 г.