Краткие сообщения по физике № 11, 12 — 1992 г.

УДК 531.19

ИНДУЦИРОВАННАЯ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ ШУМОМ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В ФИЗИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СО СТРАННЫМ АТТРАКТОРОМ

Г. А. Ляхов

Показано, что флуктуации межмодовой связи в моделях вынужденной конвекции Лоренца и магнитного динамо Рикитаке при превышении пороговой дисперсии могут обеспечивать фазовый переход по средней связи.

Динамические модели с числом мод не менее трех, которые в надпороговой области параметров обнаруживают стохастическое поведение /1/ (потоки в слое жидкости и газа с температурным напором $T_2 - T_1$ /2/; пара связанных магнитных вихрей с разностью угловых скоростей $\Omega_2 - \Omega_1$ /3/), в приложениях ориентированы на долговременные в реальном масштабе предсказания. На таких масштабах нестабильности параметров приводят к заметным изменениям динамики. Численный расчет модели Лоренца /2/ с достаточно интенсивным аддитивным шумом, в частности, дает немонотонное расплывание распределения около стационарных точек /4/.

Мультипликативные шумы высокой интенсивности качественно изменяют статистику моделей типа генетической /5/: регулярно "однофазная" система претерпевает фазовый переход при изменении среднего уровня управляющего параметра. Модели Лоренца /2/, Рикитаке /3/ и другие модели со стохастическим поведением (например, модифицированный "орегонатор" для реакции Белоусова — Жаботинского /6/) представляют собой многомерные обобщения модели /5/. Поэтому гистерезисная неустойчивость должна быть характерна и для них.

Система Лоренца

$$x' = s(y - x), \quad y' = rx - y - xz, \quad z' = xy - b \tag{1}$$

наиболее чувствительна к флуктуациям межмодовой связи r (r пропорционален *Ra* — числу Рэлея), и в физической модели этот параметр, пропорциональный разности температур на верхней и нижней границах слоя, самый нестабильный. Считая s и b постоянными, а $r = \langle r\rangle + \sigma\xi$, где σ^2 — дисперсия гауссовских флуктуаций ξ, можно приближенно свести (1) к одному стохастическому уравнению:

$$x' \approx [(r - 1)x - x^3]/(1 + x^2).$$

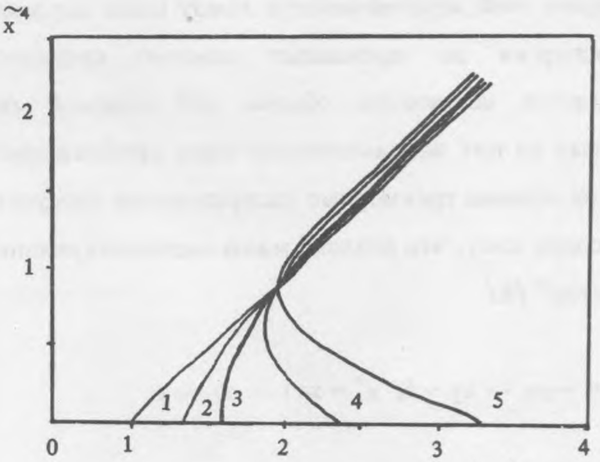
Распределение p(x) для него дает уравнение Фоккера—Планка в интерпретации Ито /7/, стационарное решение которого имеет вид:

$$\ln (p/p^0) = 2\ln(1 + x^2) + 2[(\langle r\rangle - 1)/\sigma^2 - 1]\ln x + [(\langle r\rangle - 2) - x^2/2](x^2/\sigma^2). \qquad (2)$$

Распределение (2) с учетом флуктуаций r имеет экстремумы:

$$\tilde{x} = 0, \quad \langle r\rangle - 1 = \tilde{x}^2 + \sigma^2(1 - \tilde{x}^2)/(1 + \tilde{x}^2)^2.$$

Зависимость $\tilde{x}(\langle r\rangle)$ (рис. 1) от однозначной регулярной $\tilde{x}(\sigma^2 = 0) = (\langle r\rangle - 1)^{1/2}$ переходит в гистерезисную при $\sigma^2 \geqslant \sigma_c^2 \geqslant 3^{-1}$. Критическая величина $\langle r\rangle_c = 4/3$ при этом гораздо ниже порога возникновения странного аттрактора в (1), $r_a = 24{,}74$, а критическая дисперсия невелика, $\Delta(T_2 - T_1)/\langle T_2 - T_1\rangle < 1$. Поэтому учет указанного фазового перехода в прогнозе конвекции на основе (1) представляется актуальным.



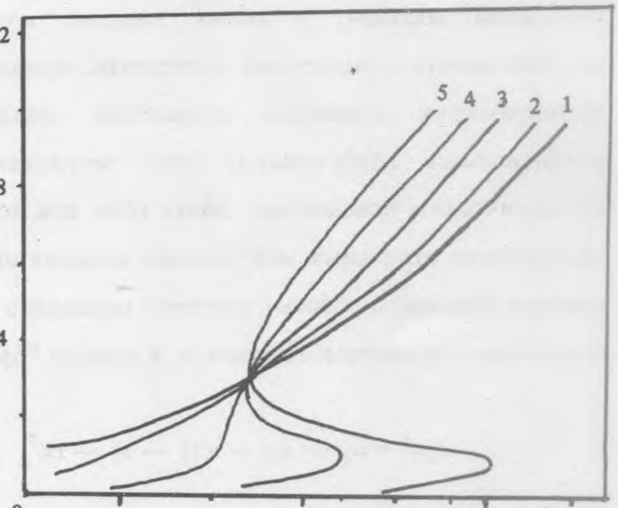


Рис. 1. Стационарная амплитуда Лоренца с шумом межмодовой связи: σ^2 = 0(1), 0,33(2), 0,5(3), 1(4), 2(5).

Рис. 2. Зависимость средней угловой скорости в модели Рикитаке от шума связи: σ^2/μ = 0(1), 1(2), 1,960(3), 3(4), 4(5).

Такой же переход происходит и в модели Рикитаке /3/:

$$x' = -\mu x + yz, \quad y' = -Ax - \mu y + xz, \quad z' = 1 - xy. \tag{3}$$

Физически определяющей здесь служит межвихревая связь $A \propto \Omega_2 - \Omega_1$; ее флуктуации приближенно описывает уравнение:

$$x' \approx x[Ax^2 + \mu(1 - x^4)]/(1 + x^4),$$

в котором $A = \langle A \rangle + \sigma\xi$. Стационарная функция распределения для него имеет вид

$$\ln(p/p_0) = 2\ln(x + x^{-3}) + [\langle A \rangle (x^2 - x^{-2}) - (\mu/2)(x^4 + x^{-4})]/\sigma^2 \tag{4}$$

с экстремумами в точках $\tilde{x} = 0$, $\langle A \rangle = \mu(\tilde{x}^2 - \tilde{x}^{-2}) + \sigma^2 \tilde{x}^2 (3 - \tilde{x}^4)/(1 + \tilde{x}^4)^2$. Порог индуцированного шумом перехода $\sigma_c^2/\mu \simeq 1{,}960$ (рис. 2).

Таким образом, в обеих моделях мультипликативный шум вызывает гистерезисную неустойчивость с умеренной дисперсией, причем пороги этой неустойчивости лежат ниже порогов возникновения странного аттрактора, пока дисперсия не превышает заметно среднюю интенсивность возбуждения. Этот результат является достаточно общим для моделей со стохастическим поведением. Более того, для некоторых из них использованное здесь приближение медленности отдельных мод (анализ влияния шума на полные трехмерные распределения составит предмет отдельной работы) заведомо оправдано благодаря тому, что реально малы соответствующие скоростные параметры. Например, в модели "орегонатор" /6/

$$\epsilon_1 x' = \mu y - xy - x(1 - z) - rx^2, \quad \epsilon_2 y' = -\mu y - xy + f, \quad z' = x(1 - z) - z$$

численные значения $\epsilon_1 \approx 5 \cdot 10^{-6}$, $\epsilon_2 \approx 10^{-3}$ /1, 6/.

Отталкиваясь от полученного результата, целесообразно поставить задачу обобщения моделей типа генетической /5/: выявление дополнительных значащих мод может обнаружить здесь и переход к странному аттрактору.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности, под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба, М., Мир, 1984.

2. Lorenz E. N. J. Atmos. Sci., **20**, 130 (1963).

3. Rikitake T. Proc. Cambridge Philos. Soc., **54**, 89 (1958).

4. Асташкина Е. В., Михайлов А. С., Толстопятенко А. В. Изв. ВУЗов, Радиофизика, **24**, 1035 (1981).

5. Arnold L., Horsthemke W., Lefever R. Zc. Phys., **B29**, 867 (1978).

6. Tyson J. J., J. Math. Biol. **5**, 351 (1978).

7. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы, М., Мир, 1987.

Институт общей физики РАН Поступила в редакцию 3 сентября 1992 г.