Краткие сообщения по физике № 11, 12 — 1992 г.

УДК 530.145

УНИФИЦИРОВАННАЯ АЛГЕБРА СВЯЗЕЙ

И. А. Баталин, И. В. Тютин

Дано единое алгебраическое описание связей первого и второго родов. На операторном уровне сформулированы основные производящие уравнения унифицированной алгебры связей. Естественным образом в алгебру включены коммутаторы фундаментальных фазовых переменных.

Исследование алгебраической структуры гамильтоновой динамики систем со связями остается одним из наиболее важных направлений математической физики. Интенсивное развитие этого направления было в значительной степени стимулировано необходимостью удовлетворить требованиям релятивистской и калибровочной инвариантности в рамках гамильтонова формализма. Поскольку связи первого рода являются гамильтоновыми калибровочными генераторами, именно этот класс связей был прежде всего исследован с алгебраической точки зрения. В работах /1—4/ сформулированы и исследованы производящие уравнения калибровочной алгебры первого рода в наиболее общем случае.

Однако алгебраический аспект теорий со связями второго рода фактически остается малоисследованным. Дело в том, что связи второго рода, сами по себе, не генерируют симметрии. Чтобы обойти эту трудность, в работах /5, 6/ был развит метод конверсии исходных связей второго рода в эффективные связи первого рода путем введения добавочных калибровочных переменных. Тем самым генерируется эффективная калибровочная симметрия и, как следствие, формализм снова приобретает резко выраженный алгебраический аспект. К сожалению, метод конверсии имеет два основных дефекта: его локальный характер и трудность естественной геометрической интерпретации вспомогательных переменных. В работе /7/ была предложена модифицированная алгебраическая схема обобщенного канонического квантования в случае связей второго рода. В этой схеме не вводится никаких вспомогательных переменных. Однако, поскольку здесь постулируется соотношение расщепленной инволюции, общий характер базиса связей приносится в жертву. Во всех упомянутых формулировках связи первого и второго родов трактуются совершенно различным образом.

Основная цель данной работы состоит в формулировке единой алгебраической схемы, в которой связи обоих родов рассматриваются симметричным образом. Ключевая идея состоит в том, что все связи находятся в инволюции, если фундаментальные коммутационные соотношения сформулированы самосогласованно. Другими словами, эти коммутационные соотношения должны быть включены единообразно в ту же унифицированную алгебру, которая содержит инволюцию связей.

Чтобы реализовать эту программу, мы формулируем основные производящие уравнения, которые единообразно генерируют фундаментальные коммутационные соотношения и соотношения инволюции вместе с бесконечной последовательностью их условий совместности. В дальнейшем мы называем все эти соотношения структурными. Число связей первого и второго родов фиксируется рангами специальных матриц, входящих в низшие структурные соотношения.

Обозначения. Как обычно, $\epsilon(A)$ и $gh(A)$ означают, соответственно, грассмановскую четность и гостовское число величины A.

Если $n = n_+ + n_-$ есть полное число некоторых суперобъектов, то $n_+(n_-)$ означает число бозонов (фермионов) среди них.

Если $\|A_{ik}\|$ есть четная суперматрица, то есть $\epsilon(A_{ik}) = \epsilon_i + \epsilon_k$, то $\mathrm{rank}_{\pm}\|A\|$ означает ранг бозе-бозе (+) или ферми-ферми (—) блоков этой суперматрицы.

Суперкоммутатор операторов определяется формулой

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}(-1)^{\epsilon(\hat{A})\epsilon(\hat{B})}.$$

Остальные обозначения ясны из контекста.

Пусть $\hat{\Gamma}^A$, $A = 1,\dots, N$, $\epsilon(\hat{\Gamma}^A) \equiv \epsilon_A$, $gh(\hat{\Gamma}^A) = 0$ — есть совокупность операторов исходных фазовых переменных. Каждому оператору $\hat{\Gamma}^A$ поставим в соответствие классическую переменную Γ^*_A противоположной статистики, обладающую гостовским числом +1:

$$\hat{\Gamma}^A \to \Gamma^*_A, \ \ \epsilon(\Gamma^*_A) = \epsilon_A + 1, \ \ gh(\Gamma^*_A) = 1.$$

Введем набор канонических пар операторов гостов:

$$(\hat{C}_\alpha, \hat{\overline{\mathcal{P}}}^\alpha), \ \ \alpha = 1,\dots, M, \ \ M_\pm < N_\pm,$$

$$\epsilon(\hat{C}_\alpha) = \epsilon(\hat{\overline{\mathcal{P}}}^\alpha) \equiv \epsilon_\alpha + 1, \ \ gh(\hat{C}_\alpha) = -gh(\hat{\overline{\mathcal{P}}}^\alpha) = 1,$$

$$(i\hbar)^{-1}[\hat{C}_\alpha, \hat{\overline{\mathcal{P}}}^\beta] = \delta^\beta_\alpha.$$

Введем операторные функции:

$$\hat{\Omega}(\hat{\Gamma}, \Gamma^*, \hat{C}, \hat{\overline{\mathcal{P}}}), \ \ \epsilon(\hat{\Omega}) = 1, \ \ gh(\hat{\Omega}) = 1,$$

$$\hat{\Delta}(\hat{\Gamma}, \Gamma^*, \hat{C}, \hat{\overline{\mathcal{P}}}), \ \ \epsilon(\hat{\Delta}) = 0, \ \ gh(\hat{\Delta}) = 2$$

и подчиним их основным производящим уравнениям

$$(i\hbar)^{-1}[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] = \hat{\Delta}, \quad (i\hbar)^{-1}[\hat{\Omega}, \hat{\Delta}] = 0 \tag{1}$$

и дополнительному условию

$$\hat{\Delta}\big|_{\Gamma^* = 0} = 0. \tag{2}$$

Заметим, что если ввести дополнительную каноническую пару фермионных операторов $(\hat{\xi}, \hat{\bar{\eta}})$ с гостовскими числами (+1, —1)

$$\epsilon(\hat{\xi}) = \epsilon(\hat{\bar{\eta}}) = 1, \quad gh(\hat{\xi}) = -gh(\hat{\bar{\eta}}) = 1, \quad (i\hbar)^{-1}[\hat{\xi}, \hat{\bar{\eta}}] = 1,$$

то уравнения (1) эквивалентны нильпотентности следующего оператора $\hat{Q}$:

$$\hat{Q} \equiv \hat{\Omega} - \hat{\bar{\eta}}\hat{\Delta} + \frac{1}{2}\hat{\xi}, \quad \epsilon(\hat{Q}) = 1, \quad gh(\hat{Q}) = 1,$$

так что

$$(1) \Longleftrightarrow (i\hbar)^{-1}[\hat{Q}, \hat{Q}] = 0.$$

Будем искать решение уравнений (1), (2) в виде ряда по степеням переменных Γ^*:

$$\hat{\Omega} = \sum_{n\geqslant 0} \hat{\Omega}_n, \quad \hat{\Delta} = \sum_{n\geqslant 0} \hat{\Delta}_n,$$

где при $n \geqslant 1$

$$\hat{\Omega}_n \equiv \Gamma^*_{A_n} \dots \Gamma^*_{A_1} \hat{\Omega}^{A_1 \dots A_n}, \quad \hat{\Delta}_n \equiv \Gamma^*_{A_n} \dots \Gamma^*_{A_1} \hat{\Delta}^{A_1 \dots A_n}.$$

Уравнения (1) дают:

$$\sum_{m=0}^{n} (i\hbar)^{-1}[\hat{\Omega}_m, \hat{\Omega}_{n-m}] = \hat{\Delta}_n, \quad \sum_{m=0}^{n} (i\hbar)^{-1}[\hat{\Omega}_m, \hat{\Delta}_{n-m}] = 0,$$

где $n = 0, 1, \dots$.

Итак, мы имеем:

при $n = 0$:

$$(i\hbar)^{-1}[\hat{\Omega}_0, \hat{\Omega}_0] = 0, \quad \hat{\Delta}_0 \equiv 0, \tag{3}$$

при $n = 1$:

$$2(i\hbar)^{-1}[\hat{\Omega}_0, \hat{\Omega}_1] = \hat{\Delta}_1, \quad (i\hbar)^{-1}[\hat{\Omega}_0, \hat{\Delta}_1] = 0, \tag{4}$$

при n = 2:

$$(i\hbar)^{-1}(2[\hat{\Omega}_0, \hat{\Omega}_2] + [\hat{\Omega}_2, \hat{\Omega}_1]) = \hat{\Delta}_2, \quad (i\hbar)^{-1}([\hat{\Omega}_0, \hat{\Delta}_2] + [\hat{\Omega}_1, \hat{\Delta}_1]) = 0, \tag{5}$$

при n = 3:

$$2(i\hbar)^{-1}([\hat{\Omega}_0, \hat{\Omega}_3] + [\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2]) = \hat{\Delta}_3, \quad (i\hbar)^{-1}([\hat{\Omega}_0, \hat{\Delta}_3] + [\hat{\Omega}_1, \hat{\Delta}_2] + [\hat{\Omega}_2, \hat{\Delta}_1]) = 0, \tag{6}$$

и т.д.

Будем искать решение уравнений (3) — (6) и следующих за ними уравнений в виде $C\overline{\mathcal{P}}$-упорядоченных рядов по степеням гостов.

Прежде всего рассмотрим левое уравнение (3). Мы имеем следующее разложение для $\hat{\Omega}_0$:

$$\hat{\Omega}_0 = \hat{C}_\alpha \hat{\Theta}^\alpha + \frac{1}{2} \hat{C}_\beta \hat{C}_\alpha \hat{U}^{\alpha\beta}_\gamma (-1)^{(\epsilon_\beta+\epsilon_\gamma)} \hat{\overline{\mathcal{P}}}^\gamma - \frac{1}{12} \hat{C}_\gamma \hat{C}_\beta \hat{C}_\alpha \hat{U}^{\alpha\beta\gamma}_{\mu\nu} (-1)^{(\epsilon_\beta+\epsilon_\gamma\epsilon_\alpha+\epsilon_\nu)} \hat{\overline{\mathcal{P}}}^\nu \hat{\overline{\mathcal{P}}}^\mu + \ldots.$$

В CC-порядке левое уравнение (3) дает

$$(i\hbar)^{-1}[\hat{\Theta}^\alpha, \hat{\Theta}^\beta] = \hat{U}^{\alpha\beta}_\gamma \hat{\Theta}^\gamma. \tag{7}$$

Мы отождествляем операторы

$$\hat{\Theta}^\alpha(\hat{\Gamma}), \quad \alpha = 1,\ldots, M, \quad \epsilon(\hat{\Theta}^\alpha) = \epsilon_\alpha$$

с классически неприводимыми связями, находящимися в инволюции между собой согласно соотношениям (7).

Рассмотрим уравнения (4). Для $\hat{\Omega}^A$ и $\hat{\Delta}^A$ мы имеем следующие разложения:

$$\hat{\Omega}^A = \hat{\Gamma}^A - \hat{C}_\alpha \hat{Y}^{A\alpha}_\beta (-1)^{[\epsilon_A(\epsilon_\alpha+1)+\epsilon_\beta]} \hat{\overline{\mathcal{P}}}^\beta + \ldots,$$

$$\hat{\Delta}^A = 2(\hat{C}_\alpha \hat{E}^{A\alpha} (-1)^{\epsilon_A(\epsilon_\alpha+1)} + \frac{1}{2} \hat{C}_\beta \hat{C}_\alpha \hat{F}^{A\alpha\beta}_\gamma (-1)^{[\epsilon_A(\epsilon_\alpha+\epsilon_\beta)+\epsilon_\beta+\epsilon_\gamma]} \hat{\overline{\mathcal{P}}}^\gamma + \ldots).$$

В C- и CC-порядках левое и правое уравнения (4), соответственно, дают:

$$(i\hbar)^{-1}[\hat{\Gamma}^A, \hat{\Theta}^\alpha] = \hat{E}^{A\alpha} + \hat{Y}^{A\alpha}_\beta \hat{\Theta}^\beta,$$

$$(i\hbar)^{-1}([\hat{E}^{A\alpha}, \hat{\Theta}^\beta] - [\hat{E}^{A\beta}, \hat{\Theta}^\alpha](-1)^{\epsilon_\alpha\epsilon_\beta}) - \tag{8}$$

$$- \hat{U}^{\alpha\beta}_\gamma \hat{E}^{A\gamma} (-1)^{\epsilon_A(\epsilon_\alpha+\epsilon_\beta+\epsilon_\gamma)} = \hat{F}^{A\alpha\beta}_\gamma \hat{\Theta}^\gamma.$$

Рассмотрим уравнения (5). Для $\hat{\Omega}^{AB}$ и $\hat{\Delta}^{AB}$ мы имеем следующие разложения:

$$\hat{\Omega}^{AB} = \left(\frac{1}{2}\ \hat{Z}^{AB}_{\alpha}(-1)^{\epsilon_\alpha}\hat{\mathcal{P}}^{\alpha} + \ldots\right)(-1)^{\epsilon_B},$$

$$\hat{\Delta}^{AB} = (-\hat{D}^{AB} + \hat{C}_{\alpha}\hat{V}^{AB\alpha}_{\beta}(-1)^{[(\epsilon_A+\epsilon_B)(\epsilon_\alpha+1)+\epsilon_\beta]}\hat{\mathcal{P}}^{\beta} + \ldots)(-1)^{\epsilon_B}.$$

В $(C)^0$- и C-порядках левое и правое уравнения (5), соответственно, дают:

$$(i\hbar)^{-1}[\hat{\Gamma}^{A}, \hat{\Gamma}^{B}] = \hat{D}^{AB} + \hat{Z}^{AB}_{\alpha}\hat{\Theta}^{\alpha},$$

$$(i\hbar)^{-1}[\hat{D}^{AB}, \hat{\Theta}^{\alpha}] - \Big(((i\hbar)^{-1}[\hat{\Gamma}^{A}, \hat{E}^{B\alpha}] - \hat{Y}^{A\alpha}_{\beta}\hat{E}^{B\beta}(-1)^{\epsilon_B(\epsilon_\alpha+\epsilon_\beta)}) - \tag{9}$$
$$-(A \longleftrightarrow B)(-1)^{\epsilon_A\epsilon_B}\Big) = \hat{V}^{AB\alpha}_{\beta}\hat{\Theta}^{\beta}.$$

Соотношения (8) и (9) обеспечивают самосогласованность фундаментальных правил коммутации для операторов фазовых переменных и связей.

Наконец, рассмотрим уравнения (6). Для $\hat{\Omega}^{ABC}$ и $\hat{\Delta}^{ABC}$ мы имеем следующие разложения:

$$\hat{\Omega}^{ABC} = \frac{1}{12}\ \hat{W}^{ABC}_{\alpha\beta}(-1)^{(\epsilon_B+\epsilon_A\epsilon_C+\epsilon_\beta)}\hat{\mathcal{P}}^{\beta}\hat{\mathcal{P}}^{\alpha} + \ldots,$$

$$\hat{\Delta}^{ABC} = -\frac{1}{3}\ \hat{X}^{ABC}_{\alpha}(-1)^{(\epsilon_B+\epsilon_A\epsilon_C+\epsilon_\alpha)}\hat{\mathcal{P}}^{\alpha} + \ldots.$$

В C- и $(C)^0$-порядках левое и правое уравнения (6), соответственно, дают:

$$((i\hbar)^{-1}[\hat{\Gamma}^{A}, \hat{Z}^{BC}_{\alpha}](-1)^{\epsilon_A\epsilon_C} + \hat{Z}^{BC}_{\beta}\hat{Y}^{A\beta}_{\alpha}(-1)^{\epsilon_A(\epsilon_B+\epsilon_\beta)}) + \tag{10}$$
$$+ \text{cycle}\ (A, B, C) + \hat{X}^{ABC}_{\alpha} = \frac{1}{2}\ \hat{W}^{ABC}_{\mu\nu}\hat{\Pi}^{\nu\mu}_{\alpha},$$

$$((i\hbar)^{-1}[\hat{\Gamma}^{A}, \hat{D}^{BC}] + \hat{Z}^{AB}_{\alpha}\hat{E}^{C\alpha}(-1)^{\epsilon_\alpha\epsilon_C})(-1)^{\epsilon_A\epsilon_C} + \text{cycle}\ (A, B, C) = \hat{X}^{ABC}_{\alpha}\hat{\Theta}^{\alpha}. \tag{11}$$

Здесь оператор деления на связь определяется формулой

$$\hat{\Pi}^{\nu\mu}_{\alpha} \equiv \hat{\Theta}^{\nu}\delta^{\mu}_{\alpha} - \hat{\Theta}^{\mu}\delta^{\nu}_{\alpha}(-1)^{\epsilon_\mu\epsilon_\nu} - i\hbar\hat{U}^{\nu\mu}_{\alpha},$$

так что в силу соотношений инволюции (7) имеет место свойство

$$\hat{\Pi}^{\nu\mu}_{\alpha}\hat{\Theta}^{\alpha} \equiv 0.$$

Соотношения (10), (11) обеспечивают совместность фундаментальных коммутаторов (9).

Вернемся к левому уравнению (3). В $CCC\overline{\mathcal{P}}$-порядке это уравнение дает:

$$((i\hbar)^{-1}[\hat{U}^{\alpha\beta}_{\gamma}, \hat{\Theta}^{\delta}](-1)^{\epsilon_\gamma\epsilon_\delta} + \hat{U}^{\alpha\beta}_{\mu}\hat{U}^{\mu\delta}_{\gamma})(-1)^{\epsilon_\alpha\epsilon_\delta} +$$
$$+\text{cycle}\ (\alpha, \beta, \delta) = \frac{1}{2}\hat{U}^{\alpha\beta\delta}_{\mu\nu}\hat{\Pi}^{\nu\mu}_{\gamma}.$$

Эти соотношения обеспечивают совместность инволюции (7).

Соотношения (8), (9) позволяют самосогласованно интерпретировать операторы $\hat{\Theta}^{\alpha}$ как набор связей первого и второго родов. Число $M'_{\pm}(M''_{\pm})$ связей первого (второго) родов среди $M_{\pm}$ классически неприводимых связей $\hat{\Theta}^{\alpha}$ фиксируется следующими соотношениями:

$$\text{rank}_{\pm}\|E^{A\alpha}\| = M'_{\pm},$$
$$\text{corank}_{\pm}\|D^{AB}\| = M''_{\pm},$$

где $M'_{\pm} + M''_{\pm} = M_{\pm}$, а $E^{A\alpha}$ и D^{AB} — классические пределы символов соответствующих операторов.

Итак, мы рассмотрели низшие структурные соотношения унифицированной алгебры. Наше основное утверждение состоит в том, что полный набор соотношений, генерируемых основными производящими уравнениями (1), (2) во всех порядках по переменным Γ^{*} и гостам $\hat{C}$, $\hat{\overline{\mathcal{P}}}$ может быть упорядочен таким образом, что соотношения, получающиеся на каждой последующей стадии, будут либо условиями совместности предыдущих соотношений, либо их следствиями.

Последнее замечание касается выбора упорядочения гостов. Разумеется, мы выбрали $C\overline{\mathcal{P}}$-упорядочение только из соображений удобства общего анализа. В зависимости от конкретного представления связей может оказаться предпочтительным иной выбор упорядочения гостов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fradkin E. S., Vilkovisky G. A. Phys. Lett., **55B**, 224 (1975).
2. Batalin I. A., Vilkovisky G. A. Phys. Lett., **69B**, 309 (1977).
3. Fradkin E. S., Fradkina T. E. Phys. Lett., **72B**, 343 (1978).
4. Batalin I. A., Fradkin E. S. Phys. Lett., **122B**, 157 (1983).
5. Faddeev L. D., Shatashvili S. L. Phys. Lett., **167B**, 225 (1986).
6. Batalin I. A,. Fradkin E. S. Nucl. Phys., **279B**, 514 (1987).
7. Batalin I. A., Lyakhovich S. L., Tyutin I. V. Mod. Phys. Lett. A, **7**, 1931 (1992).

Поступила в редакцию 11 ноября 1992 г.