Краткие сообщения по физике № 11, 12 — 1992 г.

УДК 539.17

ОБ ЭЙКОНАЛЬНЫХ ФАЗАХ РАССЕЯНИЯ И НЕЭЙКОНАЛЬНЫХ ПОПРАВКАХ В ОПТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЯДРА

В.И. Беляк

Для ядерных оптических потенциалов радиуса R с шириной "размытия" ΔR получены разложения по параметру $\Delta R/R$ эйкональных фаз рассеяния и неэйкональных поправок, исходя из представления потенциалов с помощью "размытых" δ-функций.

Рассеяние адронов на ядрах описывается в рамках оптической модели. Для оптических потенциалов, которые выражаются через интегралы от "размытых" δ-функций и через эти функции, в частности, для потенциала Вудса — Саксона, получены разложения эйкональных фаз рассеяния и неэйкональных поправок с параметром разложения $\Delta R/R$, где R и ΔR — радиус и ширина "размытия" потенциала.

Рассеяние описываем уравнением $[\nabla^2 + k^2(1 - u(r))]\Psi(r) = 0$, где $u(r)$ — безразмерный потенциал, связанный с оптическим потенциалом $U(r)$. Ограничимся первоначально нерелятивистским случаем, когда $u(r) = U(r)/E$ (E — энергия падающих частиц).

Рассмотрим объемные потенциалы, имеющие вид

$$u(r) = u_v(r),\; u_v(r) = -\overline{u}_v f_a(r - R),\; f_a(r - R) = \int_r^\infty \delta_a(r' - R)\,dr',\; f_a(-\infty) = 1. \tag{1}$$

Здесь $\delta_a(\tilde{r}) = (1/a)\varphi(\tilde{r}/a)$ — "размытая" δ-функция, имеющая указанную структуру и обычную нормировку, четная, с максимумом при $\tilde{r} = 0$, эффективной шириной $\Delta R = a/\varphi(0) \sim a \ll R$ и существенно уменьшающаяся с ростом $|\tilde{r}|$ на расстояниях $\lesssim a$. Соответственно $f_a(\tilde{r}) = \theta(\tilde{r}/a)$, $\theta(x) \equiv \int_x^\infty \varphi(x')\,dx'$, величину ΔR считаем шириной "размытия" потенциала (1). Для потенциала Вудса — Саксона

$$\varphi(x) = e^x/(1 + e^x)^2,\; \theta(x) = 1/(1 + e^x). \tag{2}$$

Эйкональные фазы рассеяния на потенциалах (1) представим в виде $\delta_{ov}(b) = (k/2)\int_b^\infty u_v'(r)\sqrt{r^2-b^2}\,dr$, b — прицельное расстояние. В подынтегральном выражении $\delta_{ov}(b)$ множитель $u_v'(r) \propto \delta_a(r-R)$ становится максимальным в точке $r_m = \max(R,b)$ и существенно уменьшается при удалении от r_m на расстояние $\lesssim a$, множитель $\sqrt{r-b}$, вообще говоря, существенно изменяется в a-окрестности r_m, множитель $\sqrt{r+b}$ слабо изменяется в этой окрестности, имея характерный размер изменения $\sim r_m \gg a$. В соответствии с этим, разлагая $\sqrt{r+b}$ по степеням $r - r_m$ и почленно интегрируя, получим асимптотическое разложение $\delta_{ov}(b)$ с параметром $\lesssim a/r_m$

$$\delta_{ov}(b) = \frac{1}{4}q_v(r_m+b)\left\{L_{1/2}(y) + \frac{1}{2(r_m+b)}\left[(b-r_m)L_{1/2}(y) + \frac{3a}{2}L_{3/2}(y)\right] + \ldots\right\},\tag{3}$$

$$L_\nu(y) \equiv \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\int_b^\infty \delta_a(r-R)\left(\frac{r-b}{a}\right)^\nu dr = \frac{1}{\Gamma(1+\nu)}\int_0^\infty \varphi(x+y)x^\nu dx,\ y \equiv \frac{b-R}{a},\ q_v(r) \equiv k\bar{u}_v\sqrt{\pi a r}.$$

Разложение (3) по существу представляет два разложения: одно — с $r_m = R$, используемое в области $b \leqslant R$, другое — с $r_m = b$, используемое в области $b \geqslant R$. Области применимости этих разложений шире указанных и частично перекрываются. В области перекрытия $|b-R| \lesssim a$ оба разложения приводят к одинаковому результату.

В области $R-b \gg a$ выражение (3) для $\delta_{ov}(b)$ можно дополнительно разложить по степеням $a/(R-b)$, используя разложение подынтегральных множителей $(r-b)^\nu$ в $L_\nu(y)$ по степеням $r-R$. Это приводит к асимптотическому разложению $\delta_{ov}(b)$ с параметром $a^2/(R-b)^2$

$$\delta_{ov}(b) = -\frac{1}{2}k\bar{u}_v\sqrt{R^2-b^2}\left[1 - \frac{C_2}{2}\frac{a^2b^2}{(R^2-b^2)^2} + \ldots\right],\ C_2 = \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)x^2 dx = 4L_2(0).\tag{4}$$

Возникновение указанного параметра объясняется тем, что он является параметром дополнительного разложения, а у четных членов разложения (3) в рассматриваемой области появляется множитель $\sim a/(R-b)$. Разложение (4) можно получить и непосредственно, используя разложение по степеням $r-R$ множителя $\sqrt{r^2-b^2}$ (а не только $\sqrt{r+b}$) в подынтегральном выражении $\delta_{ov}(b)$. Первый член разложения (4) совпадает с эйкональным выражением фаз рассеяния на прямоугольном потенциале радиуса R глубины $\overline{u}_v$ при $b < R$, которое неоднократно использовалось для оценки сечений взаимодействия частиц с ядрами /1/*.

В случае потенциала Вудса — Саксона (2) для $L_\nu(y)$, C_2 в (3), (4) имеем

$$L_\nu(y) = -\mathrm{Li}_\nu(-z),\ z \equiv \exp(-y) \equiv \exp[-(b-R)/a],\ C_2 = \pi^2/3, \tag{5}$$

где $\mathrm{Li}_\nu(x)$ — полилогарифм порядка ν /2/**, и (3) приобретает вид

$$\delta_{ov}(b) = -\frac{1}{4}q_v(r_m+b)\left\{\mathrm{Li}_{1/2}(-z) + \frac{1}{2(r_m+b)}\left[(b-r_m)\mathrm{Li}_{1/2}(-z) + \frac{3a}{2}\mathrm{Li}_{3/2}(-z)\right] + \ldots\right\}. \tag{6}$$

В области $b-R \gg a$ (6) можно разложить по степеням $\exp[-(b-R)/a]$ и получить

$$\delta_{ov}(b) = \frac{1}{2\sqrt{2}}q_v(b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\left[1 + \frac{3}{8}\frac{a}{nb} + \ldots\right]\exp\left[-n\frac{b-R}{a}\right]. \tag{7}$$

Разложение (7) соответствует разложению потенциала Вудса — Саксона в области $r > R$ по степеням $\exp[-(r-R)/a]$. Оно используется для описания рассеяния при наличии сильного поглощения ($\mathrm{Im}\, q_v(R) \gg 1$), когда основную роль играют "хвосты" потенциалов /3, 4/.

Рассмотрим потенциалы, представляющие сумму объемного и поверхностного потенциала и приводящие, в частности (наряду с (11)), к потенциалам вида "дна винной бутылки" /5/

$$u(r) = u_v(r) + u_s(r),\ u_s(r) = -\overline{u}_s\,\delta_a(r-R)/\delta_a(0). \tag{8}$$

---

* У $\delta_{ov}(b)$ имеется особенность $\propto \overline{u}_v'(0)b^2\ln b$, порождаемая нефизической особенностью потенциалов (1) при $r = 0$. Она устраняется, если использовать "симметризованные" потенциалы $u(r) = -\overline{u}_v[f_a(r-R) - f_a(r+R)]$. В (3), (4) она отсутствует из-за пренебрежимой малости $\overline{u}_v'(0) \propto \delta_a(R)$.

** Получаемые на промежуточном этапе разложения $L_\nu(y)$ при $-y \gg 1$ в случае (2) приводят к асимптотическим разложениям $\mathrm{Li}_\nu(x)$ при $-x \gg 1$.

Эйкональные фазы рассеяния на потенциалах (8) являются соответствующими суммами $\delta_o(b) = \delta_{ov}(b) + \delta_{os}(b)$, где разложения $\delta_{ov}(b)$ получены ранее (3), (4). Разложения $\delta_{os}(b)$ можно получить, исходя из выражения $\delta_{os}(b) = -(k/2)\int_b^\infty dru_s(r)r/\sqrt{r^2-b^2}$, таким же методом, как разложения (3), (4) и с такими же параметрами. При этом в обозначениях (3) имеем:

$$\delta_{os}(b) = \frac{q_s(r_m+b)}{4\varphi(0)}\left(\frac{2r_m}{r_m+b}\right)\left\{L_{-1/2}(y) + \frac{1+2b/r_m}{2(r_m+b)}\left[(b-r_m)L_{-1/2}(y) + \frac{a}{2}L_{1/2}(y)\right] + \dots\right\}, \quad (9)$$

$$\delta_{os}(b) = k\overline{u}_s\frac{aR}{2\varphi(0)\sqrt{R^2-b^2}}\left[1 + \frac{3C_2}{2}\frac{a^2b^2}{(R^2-b^2)^2} + \dots\right] \text{ при } R-b \gg a. \quad (10)$$

Для $u_s(r)$ с $\delta_a(r-R)$, соответствующей потенциалу Вудса — Саксона (2), $L_\nu(y)$, C_2 в (9), (10) сводятся к (5), $\varphi(0) = 1/4$. При этом (9) в основном приближении приобретает вид: $\delta_{os}(b) = -q_s(r_m+b)[2r_m/(r_m+b)]Li_{-1/2}(-z)$. Фазы $\delta_{os}(b)$ дают в $\delta_o(b)$ вклад $\sim \overline{u}_s/\overline{u}_v$ при $R-b \lesssim a$ и $\sim (\overline{u}_s/\overline{u}_v)[a/(R-b)]$ при $R-b \gg a$.

Для вычисления $\delta_{os}(b)$ можно использовать и такое же исходное выражение как для $\delta_{ov}(b)$. При этом получается разложение $\delta_{os}(b)$, которое отличается от (3) заменой $\overline{u}_v$, $L_\nu(y)$ на $\overline{u}_s/\varphi(0)$, $L_{\nu-1}(y)$ и не совпадает с (9) при $b < R$. Это несовпадение при $R-b \lesssim a$ несущественно, а при $R-b \gtrsim a$ проявляется в том, что у отношения нечетных членов получающегося разложения к четным (а не у отношения четных к нечетным, как в (9)) появляется уменьшающий его величину множитель $\sim a/(R-b)$. При этом основная величина фазы $\delta_{os}(b)$ оказывается при $R-b \gg a$ распределенной между первыми двумя членами ее разложения.

Рассмотрим потенциалы вида /6/

$$u(r) = u_v(r) + u_d(r), \quad u_d(r) = \overline{u}_d f_a^2(r-R). \quad (11)$$

К таким потенциалам приводит, в частности, учет релятивизма для оптических потенциалов $U(r) = -\overline{U}f_a(r-R)$. При этом в случае скалярности $U(r)$ имеем $\overline{u}_v = \overline{U}/E(1+E/2mc^2)$, $\overline{u}_d/\overline{u}_v = \overline{U}/2mc^2$. Для потенциалов (11) разложения эйкональных фаз рассеяния получаются аналогично разложениям (3), (4) и имеют вид: $\delta_o(b) = \delta_{ov}(b) + \delta_{od}(b)$,

$$\delta_{od}(b) = -\frac{1}{4}q_d(r_m+b)\left\{M_{1/2}(y) + \frac{1}{2(r_m+b)}\left[(b-r_m)M_{1/2}(y) + \frac{3a}{2}M_{3/2}(y)\right] + ...\right\}, \tag{12}$$

$$\delta_{od}(b) = -(1/2)k\overline{u}_d\sqrt{R^2-b^2}\,[1-2B_1aR/(R^2-b^2)+...] \text{ при } R-b \gg a, \tag{13}$$

$$M_\nu(y) \equiv [2/\Gamma(1+\nu)]\int_0^\infty \varphi(x+y)\,\theta(x+y)\,x^\nu dx,\ B_1 = -\int_{-\infty}^\infty \varphi(x)\,\theta(x)\,x dx.$$

Для потенциалов (11) с вудс — саксоновским выражением $f_a(r-R)$ (2) имеем $M_\nu(y) = z^2 Li''_{1+\nu}(-z) = Li_{\nu-1}(-z) - Li_\nu(-z)$, $B_1 = 1/2$. При этом (12) в основном приближении приобретает вид $\delta_{od}(b) = -(1/4)q_d(r_m+b)z^2Li''_{3/2}(-z)$. В области $b-R \gg a$ в разложении этого выражения $\delta_{od}(b)$ по степеням $\exp[-(b-R)/a]$ линейный (основной) член исчезает, поэтому роль $u_d(r)$ ослаблена в этой области и соответственно в случае сильного поглощения /3, 4/. В остальных областях $u_d(r)$ приводит к вкладу $\sim \overline{u}_d/\overline{u}_v$.

Рассмотрим первую нэйкональную поправку в фазах рассеяния /4/ для потенциалов (1). Исходя из ее представления в виде $\delta_{1v}(b) = -(k/4)\int_b^\infty dru_v(r)u'_v(r)(2b^2-r^2)/\sqrt{r^2-b^2}$ и применяя изложенный ранее метод, получим в основном приближении по параметру $\propto a$ ($\sim a/r_m$ (14) и $\sim a/(R-b)$ (15))

$$\delta_{1v}(b) = (1/4)q_v(r_m+b)\,\alpha(b,r_m)M_{-1/2}(y),\ \alpha(b,r) \equiv \overline{u}_v(2b^2-r^2)/2a(b+r), \tag{14}$$

$$\delta_{1v}(b) = (1/4)k\overline{u}_v\sqrt{R^2-b^2}\,\alpha(b,R)a/(R-b) \text{ при } R-b \gg a. \tag{15}$$

Для потенциала Вудса — Саксона $M_{-1/2}(y) = z^2Li''_{1/2}(-z)$. При этом $\delta_{1v}(b)$ дает в $\delta_{ov}(b) + \delta_{1v}(b)$ вклад $\sim \alpha(b,R)a/(R-b) \sim \overline{u}_vR/(R-b)$ при $R-b \gg a$ и $\sim \alpha(b,b)\exp[-(b-R)/a]$ при $R-b \lesssim a$ (где в случае сильного поглощения $\exp[-(b-R)/a] \propto |1/q_v(R)| \ll 1$ для существенных b /4/). Наибольший вклад $\sim \alpha(R,R) = \overline{u}_vR/4a$ поправка $\delta_{1v}(b)$ дает при $|b-R| \lesssim a$.

В области $R-b \gg a$ можно рассмотреть изложенным ранее методом фазы рассеяния в первом квазиклассическом приближении $\delta^{(1)}(b)$ и соответственно нэйкональные поправки (включая полностью первую), порождаемые этими фазами. Исходим из выражения

$$\delta^{(1)}(b) = -k\int_{r_0}^{\infty} n'(r)\sqrt{r^2-b^2/n^2(r)}\,dr,\ n(r) = \sqrt{1-u(r)},\ r_0 n(r_0) = b. \tag{16}$$

Для потенциалов (1) при $R-Rer_0 \gg a$ или практически $R-b \gg a$, заменив в подынтегральном выражении (16) плавную функцию r^2 на R^2, получим в основном приближении по параметру $a/(R-b)$

$$\delta^{(1)}(b) = ks - kb\arcsin(bs/R^2\sqrt{1+\overline{u}_v}),\ s \equiv \sqrt{R^2(1+\overline{u}_v)-b^2} - \sqrt{R^2-b^2}. \tag{17}$$

Этот результат совпадает с выражением для $\delta^{(1)}(b)$ на прямоугольном потенциале радиуса R глубины $\overline{u}_v$ при $b < R$. Разложение $\delta^{(1)}(b)$ (17) по степеням $\overline{u}_v$ является эйкональным с параметром $\overline{u}_v/\xi$, $\xi \equiv 1-b^2/R^2$. Учет второго квазиклассического приближения приводит к поправкам $\sim N_1/(kR)^2$, $N_2\overline{u}_v/(ka)(kR)$, $N_n \equiv \xi^{-3}\min[1, |\xi/\overline{u}_v|^{n+1/2}]\max(1, |\overline{u}_v|)$ (причем дополнительно уменьшенным за счет численных коэффициентов). Для потенциалов (8), при учете $u_s(r)$ в обобщенном эйкональном приближении /7/, что возможно при $|\overline{u}_s\tilde{N}_1| \ll 1$ или $|\overline{u}_s(\overline{u}_s a/\overline{u}_v R)\tilde{N}_2| \ll 1$, $\tilde{N}_n \equiv \max(1, |\overline{u}_v|^{n-1})/\max(\xi^n, |\overline{u}_v|^n)$, получим выражение $\delta^{(1)}(b)$, отличающееся от (17) наличием множителя $(1+\overline{u}_s a/\overline{u}_v R\varphi(0))$ перед первым слагаемым.

Полученные разложения фаз рассеяния можно также использовать в случае поверхностного потенциала Гаусса $u_s(r) = -\overline{u}_s\exp[-(r-R)^2/a^2]$ и соответствующего ему объемного — $u_v(r) = -(\overline{u}_v/2)\mathrm{erfc}[(r-R)/a]$. При этом в разложениях (3), (4), (9), (10) имеем $C_2 = 1/2$, $\varphi(0) = 1/\sqrt{\pi}$, $L_\nu(y) = 2^{-(1+\nu)/2}\pi^{-1/2}\exp(-y^2/2)D_{-1-\nu}(\sqrt{2}\,y)$, $D_\nu(x)$ — функции параболического цилиндра.

В настоящем рассмотрении константы R, a считались одинаковыми для всех членов используемого потенциала. Полученные выражения эйкональных фаз рассеяния в нерелятивистском приближении (вследствие линейной зависимости этих фаз от потенциала) легко обобщаются на случай, когда эти константы разные для разных слагаемых потенциала. Выражения неэйкональных и релятивистских поправок при этом могут сильно усложняться.

Полученные результаты применимы при анализе взаимодействия адронов и ядер с ядрами в области средних и низких энергий. Автор благодарит Г.М. Ваградова и Д.А. Заикина за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Fernbach S., Serber R., Taylor T.B. Phys. Rev., **75**, 1352 (1949). Беляк В.И. Изв. АН СССР, сер. физ., **32**, 1686 (1968).

2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М., Наука, 1983, с. 746. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1, М., Наука, 1973, с. 45.

3. Johnson M.B., Bethe H.A. Comments Nucl. Part. Phys., **8**, 75 (1978).

4. Беляк В.И. Изв. АН СССР, сер. физ., **53**, 991 (1989).

5. Satchler G.R. Nucl. Phys., **A394**, 349 (1983).

6. Nakano M. et al. Phys. Rev., **C40**, 1323 (1989).

7. Беляк В.И. Изв. АН СССР, сер. физ., **55**, 86 (1991).

Институт ядерных исследований РАН

Поступила в редакцию 23 ноября 1992 г.