

УДК 530.1

## К НЕАДИАБАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

В. М. Карташов<sup>1</sup>, С. А. Решетняк<sup>1</sup>, Г. Н. Третьяков<sup>1</sup>, В. А. Щеглов

*В рамках приближения двух времен релаксации построена неадиабатическая теория стохастического резонанса. Результат получен в первом порядке теории возмущений по малой амплитуде сигнала. Сделан вывод о применимости теории в широкой области изменения интенсивности шума.*

Пусть процесс нелинейного взаимодействия сигнала и шума в передемпфированной бистабильной системе описывается ланжевеновским уравнением вида

$$\frac{d\eta}{dt} = -U'(\eta) + A \cos(\omega_0 t) + \xi(t), \quad (1)$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = 2D\delta(\tau),$$

где  $\xi(t)$  – белый шум с интенсивностью  $D$  и нормальным распределением,  $U(\eta) = -\frac{a}{2}\eta^2 + \frac{b}{4}\eta^4$  – потенциальная функция, имеющая два устойчивых положения равновесия в точках  $\pm\eta_0 = \pm\sqrt{a/b}$  и потенциальный барьер между ними, высота которого  $U_0 = a^2/4b$ ,  $A$  и  $\omega_0$  – амплитуда и частота сигнала.

Взаимодействие характеризуется двумя временами релаксации. Динамическое время релаксации  $\tau_d = (2a)^{-1}$  определяет длительность перехода в устойчивое положение равновесия за счет действия потенциальной силы. Действующий на систему шум вызывает переходы из одной потенциальной ямы в другую с частотой Крамерса  $\mu_K$ . Кинетическое время релаксации  $\tau_K = \mu_K^{-1}$  характеризует установление статистического равновесия.

В области параметров системы, где частота  $\mu_K$  близка к частоте сигнала  $\omega_0$ , наблюдается аномальный рост отношения сигнал-шум с увеличением интенсивности шума.

<sup>1</sup>Московский институт радиоэлектроники и автоматики.

В литературе данное явление получило название стохастический резонанс, обзор работ которого содержится в [1]. Большинство теоретических работ по данной проблеме (см., например, [2 – 4]) посвящено адиабатической теории стохастического резонанса, в рамках которой учитывается только время  $\tau_K$ . В неадиабатической теории стохастического резонанса необходимо учитывать не только время  $\tau_K$ , но и время  $\tau_d$ . В [5] с помощью найденного решения вблизи дна потенциальной ямы такая теория построена для  $D \ll U_0$ . В данной работе проблема решается с помощью функций Грина. Динамическое время  $\tau_d$  учитывается путем введения единого эффективного высшего собственного значения соответствующей краевой задачи. При этом границы применимости теории удается расширить ( $D \lesssim U_0$ ).

Рассмотрим эквивалентное (1) кинетическое уравнение для функции распределения  $f$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + A \cos(\omega_0 t) \frac{\partial f}{\partial \eta} = \hat{L}f, \quad \hat{L}f = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( U'f + D \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (2)$$

с граничными и начальными условиями

$$\hat{L}f|_{\eta \rightarrow \pm\infty} = 0, \quad f|_{t=0} = \delta(\eta - \eta_*).$$

Решение (2) можно искать в виде ряда по малому параметру  $A$  – амплитуде сигнала:

$$f = f_0 + Af_1 + A^2f_2 + \dots$$

Части  $f_n$  общей функции распределения удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + \cos(\omega_0 t) \frac{\partial f_{n-1}}{\partial \eta} = \hat{L}f_n.$$

При включении сигнала в момент времени  $t = 0$  имеем начальные условия

$$f_0|_{t=0} = \delta(\eta - \eta_*), \quad f_1|_{t=0} = f_2|_{t=0} = \dots = 0.$$

Функция распределения  $f_0$  определяет реакцию бистабильной системы на шум и хорошо известна [6]:

$$f_0 = \rho \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta) \varphi_n(\eta_*) e^{-\mu_n t}, \quad (3)$$

где  $\rho \sim \exp(-U/D)$ ,  $\int_{-\infty}^{\infty} \rho d\eta = 1$ ,  $\varphi_n$  и  $\mu_n$  – собственные функции и собственные значения следующей краевой задачи:

$$D \frac{d}{d\eta} \left( \rho \frac{d\varphi_n}{d\eta} \right) = -\mu_n \rho \varphi_n, \quad \frac{d\varphi_n}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (4)$$

С помощью (3) находим корреляционную функцию случайного процесса на выходе бистабильной системы:

$$K(\tau) = \langle \eta(0)\eta(\tau) \rangle = \int \int_{-\infty}^{\infty} \eta \eta_* f_0(\eta_*, \eta, \tau) \rho(\eta_*) d\eta d\eta_* = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1}^2 \exp(-\mu_{2n+1}\tau),$$

где  $M_n = \int_{-\infty}^{\infty} \eta \rho(\eta) \varphi_n(\eta) d\eta$ .

Фурье-образ этой корреляционной функции определяет спектральную плотность шума:

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi} K(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{\mu_{2n+1}^2 + \omega^2} M_{2n+1}^2. \quad (5)$$

Заметим, что в силу симметрии потенциальной функции все четные коэффициенты  $M_{2n} = 0$  (интегралы в симметричных пределах от нечетных функций обращаются в нуль).

Функция распределения  $f_1$  определяет отклик системы на сигнал. Ее также можно искать в виде ряда по собственным функциям задачи (4):

$$f_1 = \rho \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \varphi_n(\eta).$$

Причем достаточно знать лишь нечетные члены этого разложения, так как только они дают отличные от нуля вклады в среднее значение  $\langle \eta \rangle$ . Подстановка данного ряда в уравнение для  $f_1$  приводит к уравнениям для коэффициентов  $C_n$ . Анализ показывает, что установившиеся со временем значения этих коэффициентов с учетом (4) имеют вид

$$C_{2n+1}(t) = \frac{\mu_{2n+1} M_{2n+1}}{D(\mu_{2n+1}^2 + \omega_0^2)} [\mu_{2n+1} \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)].$$

Отсюда находим в первом порядке теории возмущений отклик системы на сигнал:

$$\langle \eta \rangle = \sqrt{A_S^2 + B_S^2} \cos(\omega_0 t - \Phi_S),$$

где

$$A_S = \frac{A}{D} \left[ \frac{\mu_1^2 M_1^2}{\mu_1^2 + \omega_0^2} + S_1(\omega_0) \right], \quad S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}^2}{\mu_{2n+1}^2 + \omega_0^2} M_{2n+1}^2, \\ B_S = \frac{A\omega_0}{D} \left[ \frac{\mu_1 M_1^2}{\mu_1^2 + \omega_0^2} + S_2(\omega_0) \right], \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{\mu_{2n+1}^2 + \omega_0^2} M_{2n+1}^2. \quad (6)$$

$$\Phi_S = \text{arctg}(B_S/A_S).$$

В (6) специально выделен первый член ряда, так как он определяется частотой Крамера и, следовательно, кинетическим временем релаксации. Оставшиеся суммы  $S_1$  и  $S_2$  ниже будут аппроксимированы лоренцевскими линиями с помощью эффективного высшего собственного значения  $\mu_e$ , обратное значение которого совпадает с динамическим временем релаксации. Определим  $\mu_e$  следующим образом:

$$\mu_e^2 = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n+1}^2 M_{2n+1}^2}{\sum_{n=1}^{\infty} M_{2n+1}^2}. \quad (7)$$

Для расчета знаменателя (7) найдем сначала сумму

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \eta \rho(\eta) d\eta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \xi \rho(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta) \varphi_n(\xi) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \rho d\eta \approx \eta_0^2 + \frac{D}{2a}, \end{aligned}$$

где были использованы перевальный метод оценки интегралов и свойство полноты собственных функций. С учетом того, что  $M_1 \approx \eta_0 = \sqrt{a/b}$  [6], находим

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{2n+1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1}^2 - M_1^2 = \frac{D}{2a}.$$

Обратимся теперь к числителю формулы (7):

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mu_{2n+1}^2 M_{2n+1}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 M_n^2 = D^2 \int_{-\infty}^{\infty} \rho'(\xi) d\xi \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho'(\eta) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta) \varphi_n(\xi) d\eta = \\ &= D \int_{-\infty}^{\infty} U'' \rho d\eta \approx D \left[ -a + 3b \left( \eta_0^2 + \frac{D}{2a} \right) \right] \approx 2aD \left( 1 + \frac{3D}{16U_0} \right). \end{aligned}$$

Отсюда в рассматриваемой области интенсивности шума  $D \lesssim U_0$  имеем

$$\mu_e \approx 2a \left( 1 + \frac{3D}{16U_0} \right)^{1/2} \approx 2a. \quad (8)$$

Найденное  $\mu_e$  позволяет построить приближенные формулы для сумм  $S_1$  и  $S_2$ :

$$S_{1e}(\omega) = \frac{\mu_e^2}{\mu_e^2 + \omega^2} \cdot \frac{D}{2a}, \quad S_{2e}(\omega) = \frac{\mu_e}{\mu_e^2 + \omega^2} \cdot \frac{D}{2a}. \quad (9)$$

Анализ показал, что частотные зависимости сумм  $S_1$  и  $S_2$  при больших и малых  $\omega$  точно такие же, как и у  $S_{1e}$  и  $S_{2e}$ . Кроме того, площади, ограниченные лоренцевскими кривыми  $S_{1e}(\omega)$  и  $S_{2e}(\omega)$ , совпадают с их точными значениями для  $S_1$  и  $S_2$ . Учитывая также быструю сходимость сумм  $S_1$  и  $S_2$  с ростом номера  $n$ , можно сделать вывод о достаточной степени точности формул (9) во всей области изменения частоты сигнала.

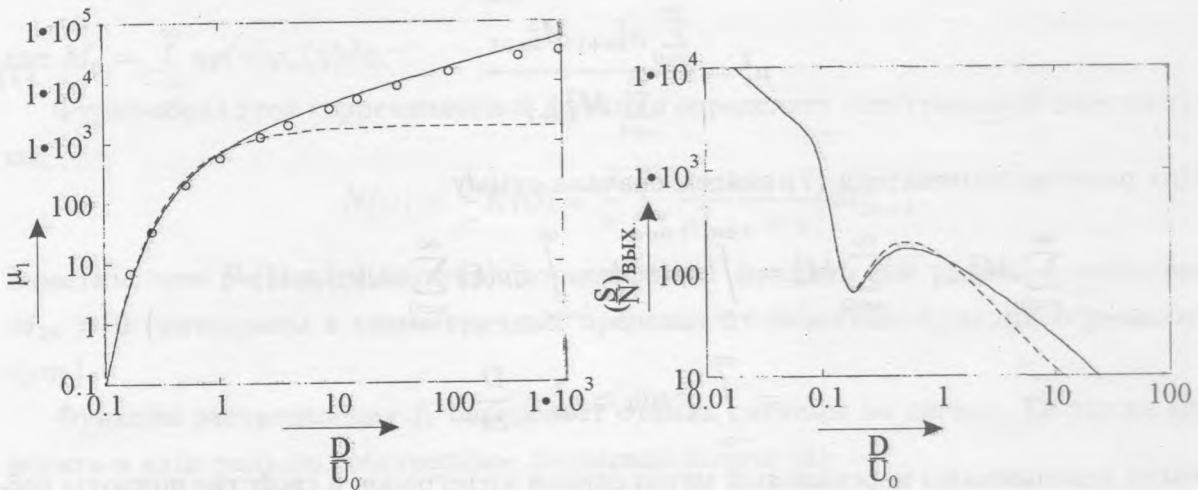


Рис. 1. Частота Крамера (пунктирная линия) и ее обобщение (сплошная линия) в зависимости от нормированной интенсивности шума  $D/U_0$  ( $a = 4000 \text{ c}^{-1}$ ,  $b = 5 \cdot 10^{-9} p^{-2} \text{ c}^{-1}$ ,  $p = [\eta]$ ).

Рис. 2. Отношение сигнал-шум  $(S/N)_{\text{вых}}$  на выходе бистабильной нелинейной системы в зависимости от нормированной интенсивности шума  $D/U_0$ . (Сплошная кривая – результаты данной работы, пунктирная – результаты [5],  $a = 4000 \text{ c}^{-1}$ ,  $b = 5 \cdot 10^{-9} p^{-2} \text{ c}^{-1}$ ,  $A = 0.3 p \text{ c}^{-1}$ ,  $p = [\eta]$ .)

Подстановка (9) в (6) приводит к следующему отношению сигнал-шум на выходе бистабильной системы:

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \frac{A_S^2 + B_S^2}{N(\omega_0)} = \left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вх}} \cdot \frac{\omega_0(a_S^2 + b_S^2)}{2abs} \quad (10)$$

$$a_S = \frac{k\mu_1^2}{\mu_1^2 + \omega_0^2} + \frac{\mu_e^2}{\mu_e^2 + \omega_0^2}, \quad b_S = \frac{k\mu_1\omega_0}{\mu_1^2 + \omega_0^2} + \frac{\mu_e\omega_0}{\mu_e^2 + \omega_0^2},$$

где  $\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вх}} = \frac{\pi A^2}{2D}$  – входное отношение сигнал-шум,  $k = \frac{8U_0}{D}$ .

До сих пор остается неопределенным собственное значение  $\mu_1$ , которое с точностью до коэффициента 2 совпадает с частотой Крамерса  $\mu_K$ . Согласно предложенной в [6] итерационной схеме решения задачи (4), в первом приближении имеем

$$\mu_1 = 2\mu_K = D \left[ \int_0^\infty \rho^{-1} dx \int_x^\infty \rho dy \right]^{-1}. \quad (11)$$

Формула (11) служит обобщением частоты Крамерса на случай больших интенсивностей шума. Для  $D \ll U_0$  из (11) следует классический результат [7]

$$\mu_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi} a \cdot \exp\left(-\frac{U_0}{D}\right). \quad (12)$$

На рис. 1 изображена частота  $\mu_1$ , рассчитанная по формулам (11) и (12) (сплошная и пунктирная линии соответственно). Видно, что кривые не совпадают в области больших  $D$ . Кружками на рис. 1 обозначены значения  $\mu_1$ , полученные путем численного решения [8] ланжевеновского уравнения (1).

На рис. 2 по формуле (10) сплошной линией построена зависимость  $(S/N)_{\text{вых}}$  от  $D/U_0$ . Пунктир соответствует результатам работы [5]. Как и следовало ожидать, при учете второго времени релаксации  $\tau_d$  отношение  $(S/N)_{\text{вых}} \rightarrow \infty$  при  $D \rightarrow 0$ . При  $\mu_e = 2a$  и частоте  $\mu_1$ , определяемой по формуле (12), полученное в нашей теории отношение  $(S/N)_{\text{вых}}$  совпадает с [5]. Но следует отметить, что результаты данной статьи и [5] получены в рамках разных подходов. Из рис. 2 следует, что при вычислении  $\mu_1$  по формуле (11) отношение  $(S/N)_{\text{вых}}$  незначительно отличается от [5] в области больших  $D$ , хотя имеется существенное различие используемых частот переходов  $\mu_1$ . Это связано с тем, что для больших  $D$  поведение  $(S/N)_{\text{вых}}$  в основном определяется эффективным собственным значением  $\mu_e = \tau_d^{-1}$ .

В заключение отметим, что предложенная здесь теория справедлива для малых амплитуд сигнала  $A \ll a\eta_0$ . Полученная нами оценка  $\mu_e$  является правильной не только для малых  $D$ , но и для  $D \sim U_0$ . Поэтому в отличие от [5] формулы (10) и (11) имеют более широкие границы применимости ( $D \lesssim U_0$ ). Проведенное нами в [8] сравнение предлагаемой теории с результатами численного моделирования подтверждает сделанный вывод.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] G a m m a i t o n i L., et al. Rev. Mod. Phys., **70**, no. 1, 223 (1998).

- [2] Fox R. Phys. Rev. A, **39**, no. 8, 4148 (1989).
- [3] McNamara B., Wiesenfeld K. Phys. Rev. A, **39**, no. 9, 4854 (1989).
- [4] Jung P. Z. Phys. B, **76**, no. 4, 521 (1989).
- [5] Hu G., Naken H., Ning C. Z. Phys. Lett. A, **172**, no. 1-2, 21 (1992).
- [6] Решетняк С. А., Шелепин Л. А. Квазистационарные распределения в кинетике. М., Автор, 1996, 296 с.
- [7] Kramers H. A. Physica (The Hague), **7**, 284 (1940).
- [8] Карташов В. М. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, (2000).

Поступила в редакцию 16 июня 2000 г.