Краткие сообщения по физике № 2 — 1991 г.

УДК 533.9:530.182

ГРУППА СИММЕТРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛАЗМЫ

В.Ф. Ковалев, В.В. Пустовалов

Для уравнений, описывающих нелинейные одномерные потенциальные движения холодной электронной плазмы без столкновений, найдена бесконечная непрерывная точечная группа эквивалентности Ли с базисом из семи инфинитезимальных операторов. Четыре из них отвечают перенормировке элементарных зарядов частиц плазмы, массы электрона и плотности ионного фона.

В работе /1/ при изучении взаимодействия электромагнитного поля с неоднородной плазмой выделенная роль потенциальной составляющей электрического поля была обусловлена характером учитываемых нелинейных процессов в области критической плотности плазмы. Использование групповых свойств симметрии одномерных потенциальных движений электронной плазмы в /1/ позволило решить задачу в условиях сильной нелинейности и неодномерного взаимодействия. Знание непрерывной группы, точно или приближенно допускаемой рассматриваемой системой уравнений, оказалось конструктивно важным для решения этой системы.

Данная работа посвящена точному групповому анализу нелинейных уравнений электронной плазмы с самосогласованным потенциальным электрическим полем $E = E(x, t)$, зависящим от одной пространственной координаты x и времени t:

$$v_t + avv_x - (e/m)E = 0, \quad E_t + avE_x - 4\pi e_i Nv = 0, \tag{1}$$

$$n_t + a(nv)_x = 0, \quad aE_x - 4\pi(en + e_i N) = 0. \tag{2}$$

Здесь v — x-компонента скорости электронов; n — их плотность; индексы t и x означают частные частные производные по соответствующим переменным; e и m — заряд и масса электрона; $N(x)$ — заданная неоднородная плотность неподвижных ионов; e_i — заряд иона; a — безразмерный (формальный) параметр. Его использование в качестве параметра соответствующей подгруппы Ли, допускаемой уравнениями (1), (2), составляет вычислительную основу предложенного в /1/ метода решения более общей системы уравнений, включающей (1), (2) как составную часть.

В простейшем случае первые два уравнения (1) допускают бесконечную группу точечных преобразований с тремя инфинитезимальными операторами:

$$\begin{gathered} X_1 = \xi^{(1)}Y; \;\; Y \equiv (\partial/\partial t) + av(\partial/\partial x) + (e/m)E(\partial/\partial v) + 4\pi e_i Nv(\partial/\partial E), \\ X_2 = \xi(\partial/\partial x) + (1/a)Y(\xi)(\partial/\partial v) + (m/ea)Y^2(\xi)(\partial/\partial E), \\ X_3 = (\xi^{(3)}/a)[a(\partial/\partial a) - v(\partial/\partial v) - E(\partial/\partial E)]. \end{gathered} \tag{3}$$

Их явный вид возникает в результате решения определяющих уравнений в рамках известного подхода в групповом анализе /2/; $\xi^{(1)}$ — произвольная функция девяти независимых переменных, из которых пять являются параметрами: $\xi^{(1)} = \xi^{(1)}(t, x, v, E; a, e, m, e_i, N)$. Функция $\xi^{(3)}$ этих же переменных подчиняется линейному уравнению в частных производных первого порядка $Y(\xi^{(3)}) = 0$. На третью входящую в базис операторов функцию ξ накладывается иное ограничение:

$$Y^3(\xi) + Y(\omega_L^2\xi) = 0, \quad \omega_L^2 = -4\pi e e_i N/m, \quad Y^3 \equiv YYY. \tag{4}$$

Множество операторов (3) образуют базис бесконечной алгебры Ли; коммутационные соотношения для этих операторов имеют следующий вид:

$$[X_1, X_2] = -[X_2(\xi^{(1)})]Y; \quad [X_1, X_3] = -[X_3(\xi^{(1)})]Y; \quad [X_2, X_3] = \frac{1}{\xi^3}[X_2(\xi^{(3)}]Y - \bar{X}_2. \tag{5}$$

Здесь оператор $\bar{X}_2$ получается из оператора X_2 заменой входящей в него функции ξ на $X_2(\xi)$:

$$\bar{X}_2 = [X_2(\xi)]\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{a}(Y[X_2(\xi)])\frac{\partial}{\partial v} + \frac{m}{e\,a}(Y^2[X_2(\xi)])\frac{\partial}{\partial E}. \tag{6}$$

Учет преобразования элементарных зарядов e, e_i частиц плазмы, массы электрона m и плотности ионов N увеличивает число операторов базиса точечной группы (3) до семи (здесь, в отличие от (3), (4), равновесная плотность ионов N однородна):

$$\begin{aligned}
X_4 &= (\xi^{(4)}/e)[2e(\partial/\partial e) + avt(\partial/\partial x) + (v + (e/m)Et)(\partial/\partial v) + 4\pi e_i Nvt(\partial/\partial E)],\\
X_5 &= (\xi^{(5)}/m)[-2m(\partial/\partial m) + avt(\partial/\partial x) + (v + (e/m)Et)(\partial/\partial v) + 4\pi e_i Nvt(\partial/\partial E)],\\
X_6 &= (\xi^{(6)}/e_i)[2e_i(\partial/\partial e_i) + avt(\partial/\partial x) + (v + (e/m)Et)(\partial/\partial v) + 4\pi e_i Nvt(\partial/\partial E)],\\
X_7 &= (\xi^{(7)}/N)[2N(\partial/\partial N) + avt(\partial/\partial x) + (v + (e/m)Et)(\partial/\partial v) + 4\pi e_i Nvt(\partial/\partial E)].
\end{aligned} \tag{7}$$

В равенствах (7) функции ξ зависят от тех же переменных, что и указанная выше функция $\xi^{(3)}$ и подчиняются одному и тому же уравнению $Y(\xi^{(k)}) = 0$. Алгебра базиса семи операторов (3) и (7) определяется помимо приведенных выше соотношений (5) следующими коммутаторами:

$$[X_1, X_k] = -[X_k(\xi^{(1)})]Y; \quad [X_3, X_k] = \frac{1}{\xi^{(k)}}[X_3(\xi^{(k)})]X_k; \quad [X_j, X_k] =$$

$$= \frac{\xi^{(j)}}{\xi^{(k)}}[X_j(\xi^{(k)})] - \frac{\xi^{(k)}}{\xi^{(j)}}[X_k(\xi^{(j)})],$$

$$[X_2, X_4] = \frac{1}{\xi^{(4)}}[X_2(\xi^{(4)})]X_4 + \frac{\xi^{(4)}}{e}Z_1; \;\; [X_2, X_5] = \frac{1}{\xi^{(5)}}[X_2(\xi^{(5)})]X_5 +$$

$$+ \frac{\xi^{(5)}}{m}Z_2; \;\; k, j = 4, 5, 6, 7; \; j \neq k, \tag{8}$$

$$[X_2, X_6] = \frac{1}{\xi^{(6)}}[X_2(\xi^{(6)})]X_6 + \frac{\xi^{(6)}}{e_i}Z_3; \;\; [X_2, X_7] = \frac{1}{\xi^{(7)}}[X_2(\xi^{(7)})]X_7 + \frac{\xi^{(7)}}{N}Z_4.$$

Каждый из четырех операторов Z возникает из оператора X_2 заменой функции ξ на соответствующую линейную комбинацию ее производных (ср. (6)):

$$(t\xi_t - v\xi_v - 2e\xi_e), \;\; (t\xi_t - v\xi_v + 2m\xi_m), \;\; (t\xi_t - v\xi_v - 2e_i\xi_{e_i}), \;\; (t\xi_t - v\xi_v - 2N/\xi_N). \tag{9}$$

Например, оператор Z_1 получается по схеме (6) заменой ξ на первую из четырех комбинаций (9).

В условиях инвариантности пяти параметров a, e, m, e_i и N четыре уравнения системы (1), (2) допускают бесконечную группу Ли точечных преобразований с одним инфинитезимальным оператором

$$X = -\xi_v(\partial/\partial t) + (\xi - v\xi_v)(\partial/\partial x) + [Y(\xi) - (e/m)E\xi_v](\partial/\partial v) + [(m/e)Y^2(\xi) - 4\pi e_i N v\xi_v](\partial/\partial E) -$$
$$- n\left\{4\pi(en + e_iN)\xi_E + \omega_L^{-2}[Y^2(\xi)]_x + 2\xi(\ln N)_x\right\}(\partial/\partial n). \tag{10}$$

В нем функция ξ четырех переменных подчиняется неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка с произвольной функцией f указанного аргумента

$$Y^2(\xi) + \omega_L^2\xi = f(E - 4\pi e_i \int dx\, N(x)); \;\; \xi = \xi(t, x, v, E), \;\; a \equiv 1. \tag{11}$$

Непрерывная точечная группа симметрии трех из четырех уравнений системы (1), (2) в однородной электронной плазме впервые найдена в работе /3/. При этом второе из уравнений (1) групповому анализу не подвергалось, параметр a был инвариантом преобразования ($a \equiv 1$) и нормировка входящих в уравнения переменных была такова, что остальные параметры отсутствовали. Для трех частных значений функции ξ оператор (10) соответствует результату /3/.

Основной результат данной работы составляют новые формулы для базиса (3), (7) семи инфинитезимальных операторов непрерывной точечной группы эквивалентности, допускаемой уравнениями холодной электронной плазмы (1), (2) и группа с оператором (10). Их использование расширяет указанные в /1/ возможности аналитического решения таких задач нелинейной теории плазмы, в которых именно потенциальные поля определяют существенно нелинейные вклады.

ЛИТЕРАТУРА

1. К о в а л е в В.Ф., П у с т о в а л о в В.В. Препринт ФИАН № 78, М., 1987; Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 41 (1989); ТМФ, **81**, 69 (1989).
2. И б р а г и м о в Н.Х. Группы преобразований в математической физике, М., Наука, 1983.
3. Ж м у д с к и й А.А., Т а р а н о в В.Б. ЖТФ, **44**, 1139 (1974).

Поступила в редакцию 12 декабря 1990 г.