

СТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ДИПОЛЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЕ — ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

М.А. Микаэлян

Найдена точная картина силовых линий статического поля точечного двумерного диполя в среде, для которой связь D и E имеет вид $E = D^{\gamma-1} D$. Такая же картина поля реализуется в однородной изотропной среде, для которой существует предел $d(\ln E)/d(\ln D)$ при $D \rightarrow 0$.

В данной работе рассматривается статическое электрическое поле, создаваемое двумя разноименно заряженными нитями в однородной изотропной среде

$$E = E(D)D/D. \quad (1)$$

Оно описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{div} D = 4\pi q[\delta(x + a/2, y) - \delta(x - a/2, y)], \operatorname{rot} E = 0. \quad (2)$$

Ввиду сложности задачи электростатики в нелинейной среде, хотелось бы упростить процедуру отыскания поля, вычленив, по возможности, задачу определения его геометрии — картины силовых линий.

Геометрическое рассмотрение удобно провести в естественной системе координат (ЕСК), связанной с сеткой силовых линий и эквипотенциалей (рис. 1). Определяется ЕСК единичным вектором касательной силовой линии $t \equiv E/E = D/D$ и единичным вектором главной нормали n , который направлен в сторону вогнутости линии. Для описания геометрии поля вводим кривизны силовых линий k_t и эквипотенциалей k_n .

В формализме описания присутствуют еще два обозначения: $\partial/\partial t$ и $\partial/\partial n$ — производные вдоль силовых линий и эквипотенциалей, соответственно. Ввиду криволинейности ЕСК $\partial^2/\partial t \partial n \neq \partial^2/\partial n \partial t$, так как смещения по t и n приводят в разные точки в зависимости от их порядка. Можно показать, что

$$\frac{\partial^2}{\partial n \partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t \partial n} = k_t \frac{\partial}{\partial t} + k_n \frac{\partial}{\partial n}. \quad (3)$$

Кривизна (по определению) есть модуль производной угла наклона касательной по длине кривой:

$$k_t = |\partial\varphi/\partial t| = -\partial\varphi/\partial t, \quad k_n = |\partial\varphi/\partial n| = -\partial\varphi/\partial n, \quad (4)$$

где φ — угол наклона t к оси x^* . Подставив в (3) угол φ и воспользовавшись (4), получим

$$\partial k_t / \partial n - k_t^2 = \partial k_n / \partial t + k_n^2. \quad (5)$$

Уравнения (2) в ЕСК принимают простой вид

$$(1/D)\partial D/\partial t = -k_n, \quad (1/E)\partial E/\partial n = k_t. \quad (6)$$

Используя материальное уравнение среды (1), перепишем первое из уравнений (6)

$$(1/E)\partial E/\partial t = -\Gamma k_n, \quad (7)$$

где $\Gamma \equiv d(\ln E)/d(\ln D)$. Продифференцируем второе из уравнений (6) по t и (7) по n и вычтем одно из другого. Воспользовавшись (3), получим

$$\partial k_t / \partial t + (1 - \Gamma)k_t k_n + \Gamma \partial k_n / \partial n + k_n \partial \Gamma / \partial n = 0. \quad (8)$$

Это уравнение становится чисто геометрическим, если величина Γ окажется константой. Это имеет место для "степенных" сред, в которых

$$E \propto D^\gamma, \quad (9)$$

где $\gamma = \text{const} \geq 0$. При этом $\Gamma = \gamma$ и (8) принимает вид

$$\partial k_t / \partial t + (1 - \gamma)k_t k_n + \gamma \partial k_n / \partial n = 0. \quad (10)$$

* Во избежание недоразумений со знаками все формулы следует относить к квадранту $x \leq 0, y \geq 0$ (рис. 1).

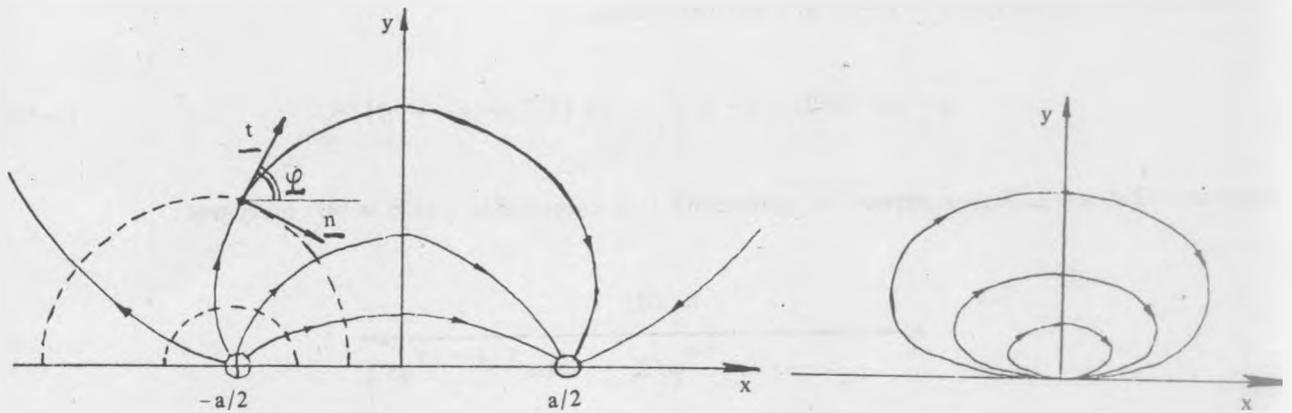


Рис. 1. Схема силовых линий (сплошные линии) и эквипотенциалей (пунктир) диполя длины a .

Рис. 2. Картина силовых линий точечного диполя.

Уравнения (5) и (10) совместно определяют геометрию поля. В частности, в линейной среде $D = \epsilon E$ ($\gamma = 1$) силовые линии и эквипотенциалы — окружности.

Из (5) и (10) следует, что для "степенной" среды (9) изменение расстояния a между зарядами сводится к всестороннему растяжению картины поля. Это обуславливает степенную зависимость от a энергии поля $U = \int dr \int dD E / 4\pi$ и силы взаимодействия зарядов $f = -\partial U / \partial a$. Для трехмерного диполя $f \propto 1/a^{2\gamma}$, — для двумерного — $f \propto 1/a^\gamma$.

Найдем картину поля для среды (9) в пределе $a \rightarrow 0$ (рис. 2). Ищем решение в виде функциональной связи k_t , k_n и φ . Из соображений размерности $k_n = k_t u(\varphi)$. Исключив с помощью этого соотношения k_n из (5) и (10), получим

$$\frac{\partial(1/k_t)}{\partial t} = u - \frac{2\gamma u u'}{1 + \gamma u^2}, \quad \frac{\partial(1/k_t)}{\partial n} = \frac{1 - \gamma u^2}{1 + \gamma u^2} u' - 1. \quad (11)$$

Продифференцируем первое из этих соотношений по n , а второе по t (при этом используем (4)), после чего вычтем одно из другого. После применения (3) вторые производные от $1/k_t$ выразим через первые, значения которых подставим из (13). Совершив в полученном соотношении подстановку $u = k_n/k_t$, получим

$$u'' - \frac{2\gamma uu'^2}{1 + \gamma u^2} = \frac{2(1 - \gamma)uu'}{1 + \gamma u^2} \quad (12)$$

Решение (12), удовлетворяющее граничным условиям (на положительной полуоси $y: \varphi = 0, u = 0$; на отрицательной полуоси $x: \varphi = \pi, u \rightarrow \infty$), имеет вид:

$$u = \alpha \operatorname{tg}(\varphi/2), \quad \alpha = [(\gamma^2 - \gamma + 1)^{1/2} - (1 - \gamma)]/\gamma, \quad (13)$$

причем $1/2 \leq \alpha < 2$. Решая первое из уравнений (11) совместно с (13) и (4), получим

$$k_1 = \frac{k_1(0)}{(1 - \gamma) \cos^{2\alpha} \varphi/2 + \gamma \cos^{2(\alpha-1)} \varphi/2} \quad (14)$$

Решая второе из уравнений (11) совместно с (13) на оси $y(\varphi = 0, dn = -dy)$, получим

$$k_1(0) = 2/(2 - \alpha)y. \quad (15)$$

Таким образом, картина силовых линий в "степенной" среде (9) описывается однопараметрическим семейством кривых (14), (15), где y — параметр.

Решая уравнения (6) совместно с (15) получаем, что на оси $y \ E \propto |y|^{-2/(2-\alpha)}$, а на оси $x: D \propto |x|^{-2\alpha/(2\alpha-1)}$.

"Степенная" среда (9), рассмотренная ранее нереалистична, так как для любого γ диэлектрическая проницаемость $\epsilon = dD/dE$ неизбежно попадает (либо при больших, либо при малых E) в область запрещенных значений от нуля до единицы $/1/$. Однако, для любой реальной среды при $a \rightarrow 0$ поле во всем пространстве стремится к нулю и, соответственно, функция Γ стремится к постоянному пределу $\lim_{D \rightarrow 0} d(\ln E)/d(\ln D)$. Поэтому полученное выше решение остается в силе и в случае произвольной среды, для которой существует указанный предел.

Следует отметить, что полученное решение представляет лишь методический интерес, так как реальные неупорядоченные среды при малых E ведут себя как линейные*. Однако, если картина поля в пределе $a \rightarrow 0$ определяется поведением $E(D)$ при $E \rightarrow 0$, то сила взаимодействия зарядов в этом же пределе определяется противоположной асимптотикой $E \rightarrow \infty$, когда в реальных средах уже существенна нелинейность. Действительно, при $a \rightarrow 0$ поле $E \rightarrow 0$ всюду, кроме начала координат,

* О полях внешних зарядов в упорядоченных средах, обладающих электромагнитным параметром порядка, см. в работах [2, 3].

где, соответственно, локализуется и вся энергия поля U . Поэтому вклад в силу взаимодействия зарядов (в зависимость U от a) дает в пределе $a \rightarrow 0$ окрестность начала координат.

Можно показать, что выражение для силы взаимодействия зарядов в произвольной среде (1) при $a \rightarrow 0$ выглядит так же, как и в "степенной" среде (9), для которой $\gamma = \lim_{D \rightarrow \infty} d(\ln E)/d(\ln D)$. Зависимость этой силы от расстояния получена выше. Ее точное определение было бы возможным при обобщении решения (14), (15) на случай произвольного a .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. К и р ж н и ц Д.А. УФН, 152, 399 (1987).
2. К и р ж н и ц Д.А. Письма в ЖЭТФ, 30, 624 (1979).
3. К и р ж н и ц Д.А., М и к а э л я н М.А. ЖЭТФ, 97, 795 (1990).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 24 декабря 1990 г.