

УДК 530.1

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКОГО РЕЗОНАНСА

В. М. Каргашов¹, С. А. Решетняк¹, Г. Н. Третьяков¹, В. А. Щеглов

Проведено численное моделирование эффекта стохастического резонанса при взаимодействии сигнала и шума в бистабильной системе. Результаты численного эксперимента подтверждают предложенную авторами неадиабатическую теорию этого явления.

Рассмотрим следующее ланжевеновское дифференциальное уравнение, которое описывает эффект стохастического резонанса [1]:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} + U'(\eta) &= A \cos(\omega_0 t) + \xi(t), \\ \langle \xi(t) \rangle &= 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = K(\tau), \end{aligned} \quad (1)$$

где η – параметр порядка; $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс, моделирующий шум; $U(\eta)$ – бистабильный потенциал; A и ω_0 – амплитуда и частота сигнала; $K(\tau)$ – корреляционная функция шума.

В основе теоретических исследований стохастического резонанса (СР) лежит кинетическое уравнение Фоккера–Планка для функции распределения параметра порядка. При этом $\xi(t)$ есть белый шум с корреляционной функцией $K(\tau) = 2D\delta(\tau)$, где D – интенсивность шума. Наиболее адекватное описание СР дают неадиабатические теории [2, 3]. Используя разные подходы работы [2, 3] приводят к близким результатам. Однако, в отличие от [2], в [3] сделан вывод о применимости теории не только для малых, но и для больших интенсивностей шума D . Цель данной работы – проведение численного моделирования СР с проверкой результатов работы [3].

¹Московский институт радиоэлектроники и автоматики.

Проведенное нами моделирование опирается на численное решение уравнения (1). Была принята следующая модель шума:

$$\xi(t) = h \sum_{k=1}^N \cos(\omega_k t + \varphi_k), \quad (2)$$

где $N = 3 \cdot 10^4$ – число гармоник со случайно и равномерно распределенными фазами φ_k в интервале $(-\pi, \pi)$, $\omega_k = k \cdot \Delta\omega$ – дискретный спектр частот шума, $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ ($\Delta f = 1$ Гц), h – амплитуда гармоник, варьируя которую, можно изменять интенсивность шума.

Согласно центральной предельной теореме случайная величина ξ должна быть распределена по гауссовому закону с нулевым средним значением. На рис. 1 для одной из реализаций шума показан закон распределения $P(\xi)$, который является нормальным.

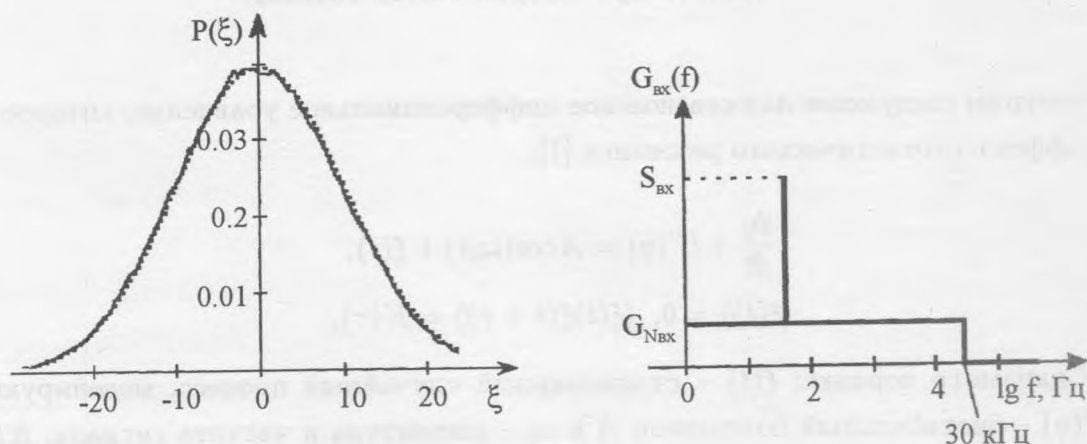


Рис. 1. Закон распределения случайной величины ξ (сплошная кривая – результаты численного анализа, пунктирная кривая – нормальное распределение).

Рис. 2. Спектральная плотность шума и амплитуда сигнала на входе бистабильной системы ($f_0 = 40$ Гц).

Как показывает несложный анализ, корреляционная функция случайного процесса (2) имеет вид

$$K(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t + \tau) \rangle = \frac{h^2 \sin(\Delta\omega\tau N/2) \cos[\Delta\omega\tau(N + 1)/2]}{2 \sin(\Delta\omega\tau/2)} \approx$$

$$\approx \frac{a^2 \sin(\Delta\omega\tau N)}{2 \sin(\Delta\omega\tau)}. \quad (3)$$

Время корреляции τ_k было определено из равенства $D = \sigma^2\tau_k$. Поскольку для белого шума

$$\int_0^{\infty} K(\tau)d\tau = D, \quad (4)$$

то подстановка (3) в (4) дает $\tau_k = (4\Delta fN)^{-1} = 0.83 \cdot 10^{-5}$ с. Это время существенно меньше других характерных времен модели.

Расчет отношения сигнал-шум (S/N) проводили с помощью Фурье-преобразования суммы детерминированного и случайного процессов на входе и выходе бистабильной системы. На рис. 2 представлен фурье-образ $G_{\text{вх}}(f)$ правой части уравнения (1). Из-за фазовых соотношений амплитуда сигнальной гармоники зависит от конкретной реализации шума, в то время как спектральная плотность $G_{N_{\text{вх}}}$ остается постоянной при заданном σ . Поэтому входное отношение S/N определяли по формуле

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вх}} = \frac{S_{\text{вх}}^2}{G_{N_{\text{вх}}}^2}, \quad (5)$$

где $S_{\text{вх}}$ – усредненная по реализациям шума амплитуда входного сигнала (мы использовали 10 реализаций шума с длительностью 1 с каждая).

Выходное отношение S/N находили путем численного решения (1) для $U(\eta) = -a\eta^2/2 + b\eta^4/4$, $a = 4000 \text{ с}^{-1}$, $b = 5 \cdot 10^{-9} \text{ п}^{-2} \text{ с}^{-1}$, $A = 0.3 \text{ пс}^{-1}$, где п – единица измерения параметра порядка. Был применен метод Рунге–Кутты четвертого порядка из пакета прикладных программ Mathcad-7pro. Сетка по времени содержала 2^{18} точек, что обеспечивало высокую точность решения.

На выходе бистабильной системы находили фурье-образ $G_{\text{вых}}(f)$ случайного процесса $\eta(t)$, также усредненный по реализациям шума. Отношение сигнал-шум вычисляли по формуле

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{вых}} = \frac{S_{\text{вых}}^2}{N_{\text{вых}}}, \quad (6)$$

где $S_{\text{вых}} = G_{\text{вых}}(f_0)$ – усредненная по реализациям шума амплитуда выходного сигнала, $N_{\text{вых}}$ – спектральная плотность интенсивности шума в окрестности сигнальной частоты f_0 , которая с учетом 10 гармоник, расположенных слева и справа от f_0 , имеет вид

$$N_{\text{вых}} = \frac{1}{20} \sum_{k=-10}^{10} [G_{\text{вых}}^2(f_0 + k \cdot \Delta f) - G_{\text{вых}}^2(f_0)].$$

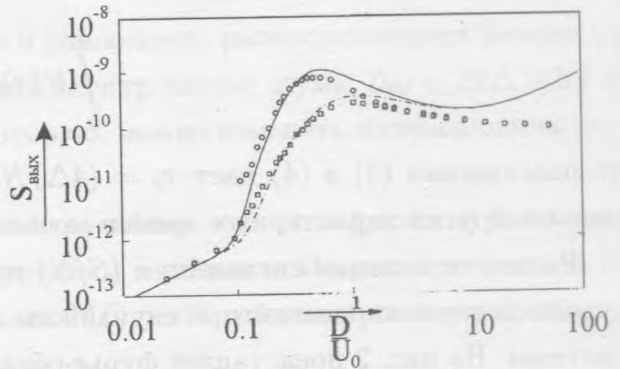
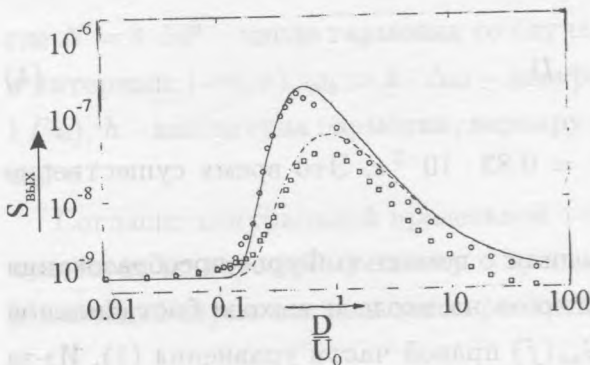


Рис. 3. Амплитуда выходного сигнала.

Рис. 4. Спектральная плотность выходного шума вблизи сигнальной частоты.

Результаты численного моделирования для разных значений интенсивности D входного шума представлены на рис. 3 – 6 и сопоставлены с теоретическими кривыми [3]. Точки в виде кружков соответствуют сигнальной частоте $f_0 = 40 \text{ Гц}$, а квадраты – $f_0 = 120 \text{ Гц}$. Интенсивность D была нормирована на высоту потенциального барьера $U_0 = a^2/4b$.

В результате взаимодействия сигнала и шума амплитуда выходного сигнала имеет максимум (см. рис. 3), обусловленный совпадением частоты μ_1 Крамерса с частотой сигнала ω_0 . Именно это обстоятельство позволило назвать рассматриваемый эффект ”стохастическим резонансом” [4]. Резкое возрастание $S_{\text{вых}}$ с увеличением D является основной причиной роста отношения S/N (см. рис. 5) в области

$$\frac{D}{8U_0} \omega_0 \lesssim \mu_1 \lesssim \omega_0. \tag{7}$$

Оценки показывают, что левое неравенство (7) соответствует локальному минимуму на рис. 5, а правое – максимуму.

Фильтрующие свойства бистабильной системы можно охарактеризовать, рассматривая коэффициент

$$q = \frac{(S/N)_{\text{вых}}}{(S/N)_{\text{вх}}}. \tag{8}$$

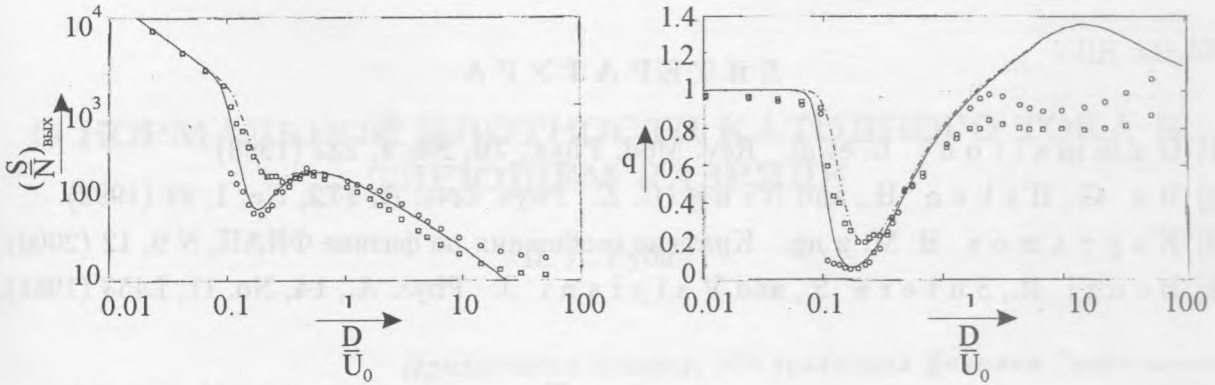


Рис. 5. Выходное отношение сигнал-шум.

Рис. 6. Выходное отношение сигнал-шум, нормированное к отношению сигнал-шум на входе.

На рис. 6 представлена зависимость q от нормированной интенсивности шума на входе системы D/U_0 . Видно, что данный коэффициент в области (7) не превышает единицы. Положение минимума кривой q совпадает с положением минимума кривой $(S/N)_{\text{вых}}$. Начальный рост q с увеличением D обусловлен ростом $(S/N)_{\text{вых}}$. Отметим, что дальнейший рост q при интенсивностях D порядка U_0 или превышающих U_0 в несколько раз, происходит там, где условия СР не выполняются. Это вызвано падением спектральной плотности $N_{\text{вых}}$ в указанной области интенсивности шума (см. рис. 4). Для очень больших D при $f_0 = 40 \text{ Гц}$ некоторые значения q близки к единице (а для отдельных реализаций шума превышают 1). Хотя они не вполне достоверны из-за трудности выделения слабого сигнала на фоне помех, но тем не менее указывают на перспективность проведения здесь как теоретических, так и экспериментальных исследований СР.

В рамках той же модели была также найдена частота μ_1 Крамерса. Ее определяли через среднее время переходов из одной потенциальной ямы в другую при действии шума. Результаты моделирования приведены в [3]. Они подтверждают предложенную в [3] формулу, обобщающую частоту μ_1 на случай больших D .

Таким образом, проведенный численный эксперимент подтверждает предложенную в [3] неадиабатическую теорию СР. Численные результаты хорошо ложатся на теоретические кривые, справедливые для входных интенсивностей шума $D \lesssim U_0$. Кроме того, проведенный численный анализ СР указывает на то, что выходное отношение сигнал-шум в области своего локального максимума при резком различии динамического и

кинетического времен релаксации не превышает входное отношение сигнал-шум.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gamma itoni L. et al. Rev. Mod. Phys., **70**, No. 1, 223 (1998).
- [2] Hu G., Haken H., and Ning C. Z. Phys. Lett. A, **172**, No. 1, 21 (1992).
- [3] Карташов В. М. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, N 9, 12 (2000).
- [4] Benzi R., Suter a S., and Valpiani J. Phys. A., **14**, No. 11, L453 (1981).

Поступила в редакцию 16 июня 2000 г.