УДК 538.915

ИНДУКТИВНОСТЬ МЕТАЛЛОВ И СВЕРХПРОВОДНИКОВ

Г. М. Гуро

Найдена зависимость внутреннего коэффициента самоиндукции $L_i(\omega)$ от частоты возбуждения. Она определяется параметром $\delta(\omega)$, являющимся для металлов толщиной слоя протекания тока в скин-эффекте.

Согласно [1] в системе линейных токов коэффициент самоиндукции L может быть представлен через коэффициенты внутренней самоиндукции $L_i(\omega)$, определяемой электронными процессами при возбуждении системы переменным током, и внешней самоиндукции L_e, описывающей процессы при возбуждении постоянным током.

Коэффициент L определяется из выражения

$$L = \frac{c\Phi}{J}, \tag{1}$$

следующего из закона индукции Фарадея

$$\frac{1}{c}L\frac{dJ}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt},$$

где Φ – магнитный поток, создаваемый полным током J, протекающим по сечению s проводника ($J = sj$), j соответствует плотности тока проводимости $\mathbf{j} = \sigma\vec{\mathcal{E}}$ (σ – проводимость, $\vec{\mathcal{E}}$ – электрическое поле). Током смещения пренебрегается.

L_i и L_e соответствуют двум типам связи магнитного поля (вектор-потенциала $\mathbf{A}$) и плотности тока $\mathbf{j}$, которые определяются локальной связью внутри проводника

$$\mathbf{A} = -\frac{8\pi}{c}\mathbf{j}\delta^2; \; \delta^2 = -\frac{c^2}{8\pi\delta i\omega} \tag{2}$$

и интегральной связью тока, текущего внутри проводника, с магнитным полем вне его,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int\limits_{v_j}\vec{\mathbf{j}}/R\,dv_j. \tag{3}$$

Интегрирование производится по объему v_j, занимаемому током, R – размер системы. Подстановка выражения (2) и соотношения (3) в формулу приводит к выражениям

$$L_i(\omega) = \mathcal{L}\frac{\delta^2(\omega)}{s}; \tag{4а}$$

$$\delta^2 = \frac{\lambda^2}{i\omega\tau}; \ \lambda^2 = \frac{m_e c^2}{4\pi e^2 n}; \tag{4б}$$

$$L_e = \mathcal{L}\ln\frac{R}{r}. \tag{5}$$

Здесь $\mathcal{L}$ – длина проводника, m_e – масса электронов, n – их концентрация, r – радиус проводника, R – размер системы (для контура – его радиус; для прямолинейного проводника – расстояние от него, на котором можно пренебречь $\mathbf{A}$).

Отметим, что ранее рассматривались другие коэффициенты самоиндукции: L_M (L магнитное), описывающее распределение магнитного поля вне проводника [2] и L_κ (L кинетическое), связанное с энергией свободных электронов [3]. Однако для определения L_κ необходимо дополнительное условие, которое авторами не приводится. Для L_i и L_e результаты представляются в замкнутом виде.

В монографии [4] было указано, что самоиндукция должна в принципе зависеть от частоты возбуждения.

Ниже приводится вывод полученных нами конкретных соотношений.

Следуя уравнению Максвелла

$$\vec{\mathcal{E}} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \text{grad}\varphi \approx -\frac{i\omega}{c}\mathbf{A}$$

и материальному уравнению $\mathbf{j} = \sigma\vec{\mathcal{E}}$, приходим к выражению локальной связи

$$\mathbf{A} = -\frac{c}{i\omega\delta}\cdot\mathbf{j} = -\frac{8\pi}{c}\frac{c^2}{8\pi i\omega\sigma}\mathbf{j} = -\frac{8\pi}{c}\delta^2(\omega)$$

и соотношению

$$L_i(\omega) = \frac{\mathcal{L}}{s}\delta^2(\omega) \ (4а).$$

Зависимость $L_i(\omega)$ содержится в параметре $\delta^2(\omega) = \frac{\lambda^2}{i\omega\tau}$ (4б). Поэтому частотный интервал $L_i(\omega)$ может быть записан в виде

$$\omega_j \leq \omega < \frac{1}{\tau}; \ \omega_j = \frac{\lambda^2}{r^2}\frac{1}{\tau}.$$

Здесь ω_j – низкочастотная граница, где возникает переход от нормального скин-эффекта [5] к области квазистационарных токов [1], τ – столкновительное время электронов с решеткой.

Высокочастотная граница соответствует параметру, сравнимому с длиной пробега электронов $l_T = v_T\tau$ (т.е. $\omega < \frac{1}{\tau}$), когда происходит переход от нормального скин-эффекта к аномальному [5].

Учитывая особенности скин-эффекта, можно провести замену параметра $\delta(\omega)$ на поверхностный импеданс (со значениями электрического и магнитного полей на поверхности проводника)

$$Z_s = \frac{4\pi}{c}\zeta_s;\ \zeta_s = \frac{\epsilon}{H}\bigg|_s,$$

который связан с $L_i(\omega)$ соотношением

$$L_i(\omega) = 8\pi\frac{\mathcal{L}}{s}\frac{c^4}{\omega^2}Z_s^2(\omega);\ \zeta_s = \frac{\omega}{c}\delta(\omega) \qquad (6)$$

(при $\delta << r$ слой $\delta(\omega)$ можно считать поверхностным).

Перейдем к рассмотрению интегральной связи.

Используя уравнение Максвелла $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}j$, формулу $\mathbf{H} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$ и калибровочное соотношение $\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$, получим уравнение $\nabla^2\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}j$, решением которого является выражение

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{c}\int\limits_{v_j}\mathbf{j}/R dv_j(3);\ R = \sqrt{(x_R - x_j)^2 + (y_R - y_j)^2 + (z_R - z_j)^2}.$$

Здесь точки R_j расположены в проводнике, а точки R_R – в окружающем пространстве.

$$L = L_e = \mathcal{L}\ln\left(\frac{R}{r}\right)$$

соответствует предельному значению при $\omega \to 0$.

При малых r ($r < \lambda$ – полоска пленки малой толщины; $\omega > \omega_j$) L_i, увеличиваясь, приближается к L_e. Поэтому в металлах при таких толщинах $L = L_e + L_i$.

Переход металл–сверхпроводник (М $\to$ СП) происходит при $\tau \to \infty$ [6]. Поэтому из выражения

$$\sigma = \frac{e^2 n\tau}{m}\cdot\frac{1}{(1 + i\omega\tau)}$$

следует

$$\delta^2 = \frac{c^2}{i\omega\sigma} = \lambda^2\frac{(1 + i\omega\tau)}{i\omega\tau} \to_{\tau\to\infty} \lambda^2. \qquad (7)$$

При переходе М $\to$ СП толщина скин-слоя $\delta(\omega)$ заменяется на λ, не зависящую от частоты возбуждения.

$$\lambda^2 = \lambda_s^2 = \frac{m^* c^2}{4\pi(e^*)^2 n_s}; \; n = n_s + n_n, e^* = 2e; m^* = 2m_s.$$

В СП имеет место постоянный незатухающий ток J (т.е. $L = L_{es}$).

Кроме того, в СП справедливо уравнение Лондона [7] $j = \frac{c}{4\pi} 1/\lambda^2 \mathbf{A}$, которое является локальной связью ($L = L_{is}$). Таким образом, в СП будет также $L = L_{es} + L_{is}$.

При нормальных размерах r ($r \sim 1$ *мм*) $L_{es} >> L_{is}$.

В СП λ зависит от температуры [8]:

$$\lambda(T) = \frac{\lambda(\sigma)}{(1-t^4)^{1/2}}; \; t = \frac{T}{T_c}. \tag{8}$$

При действии на СП переменного тока ($d\omega/dt \neq 0$) в последнем возникает электрическое поле $\vec{\mathcal{E}}$. Такое поле вызывает ток нормальных электронов, который нагревает образец, изменяя величину λ.

Потери на нагревание согласно [1] зависят от частоты. Используя указанную зависимость и выражение (8), можно получить аналогично металлам частотную зависимость $L_{is}(\omega)$.

В заключение автор выражает благодарность А. И. Головашкину за обсуждение результатов данной работы и Л. А. Шелепину за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред, §§ 33, 34, 60 (1992).

[2] Koch H., Lübbig H. eds. Superconducting Devieses and Their Applications, B. Cabrera, New York, Springer-Verlag, p. 236, 1991.

[3] Пенин Н. А., Головашкин А. И., Гуро Г. М. ФТТ, **38**, (5), 1493 (1996).

[4] Тамм И. Е. Основы теории электричества. § 90, гл. VI, 1966.

[5] Reuter G. E. H., Sondheimer E. H. Proc. Roy. Soc., **195**, N 1042, 336 (1948).

[6] VanDuzer T., Turner C. W. Principles Superconductive Devies and Circuites. New York, Elesvier, 1981.

[7] Superfluides eds. F. London, 1 § 3. NY, 1952.

[8] Л и н т о н Э. Сверхпроводимость. М., Мир, гл. II, § 4, 1971.

Поступила в редакцию 15 сентября 2000 г.