Краткие сообщения по физике № 8 — 1991 г.

УДК 533.9

ВЛИЯНИЕ РАСПАДОВ НА ДИНАМИКУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ МОД

А.М. Игнатов, И.А. Келехсаева

Исследуется возможность насыщения линейной неустойчивости за счет распадных процессов. Рассматривается пример пучково-плазменной неустойчивости.

Изучение нелинейного взаимодействия колебаний в реактивно-неустойчивых средах началось сравнительно недавно /1/. Известно, что "элементарными возбуждениями" в такой среде являются пары нарастающих и затухающих волн /2/. Механизмы нелинейной стабилизации неустойчивых мод могут быть самыми различными. Как правило, это нелинейный сдвиг частоты или захват частиц полем волны /3/. Представляет интерес исследование возможности стабилизации неустойчивости вследствие развития распадов в системе.

Рассмотрим среду, состоящую из слабо связанных между собой подсистем, в каждой из которых могут распространяться собственные волны с законами дисперсии $\omega_\alpha(k)$, где $\alpha = \pm 1$ нумерует подсистемы. Для определенности предположим, что спектр $\omega_1(k)$ является распадным. Будем характеризовать амплитуды волн, распространяющихся в системе, парами канонически сопряженных переменных $a_\alpha(z)$, $a^*_\alpha(z)$. Линейная неустойчивость в такой среде реализуется в окрестности точки пересечения дисперсионных кривых для которой $\omega_1(k_1) = -\omega_{-1}(-k_1)$.

Следуя /4/, разложим гамильтониан системы по степеням $a_\alpha(k)$: $H = H_2 + H_{int} + H_3 + H_4$. Здесь $H_2 = \sum_\alpha \int dk\ \omega_\alpha(k)|a_1(k)|^2$ — энергия системы в отсутствие связи между подсистемами, $H_{int} = 2\mathrm{Re}\int dk\ \gamma(k) a_1(k) a_{-1}(-k)$ — энергия взаимодействия подсистем ($\gamma(k) \ll \omega_\alpha(k)$ — связь между подсистемами слабая), H_3 — существенный член третьей степени, описывающий распады в подсистеме 1: $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, и H_4 — энергия, связанная с рассеянием и самовоздействием волн через виртуальные гармоники.

Применяя процедуру укорачивания, получим уравнения, описывающие взаимодействие слабо связанных мод, одна из которых неустойчива относительно распада на половинную субгармонику:

$$\partial c_\alpha/\partial\tau = -i\alpha\partial H/\partial c^*_\alpha,\ \partial a/\partial\tau = -i\partial H/\partial a^* \tag{1}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}[c_1(a^*)^2] + \epsilon\left\{\sum_{\alpha} c_\alpha c^*_{-\alpha} + \frac{1}{2}W^1_1|c_1|^4 + \frac{1}{2}W^1_{-1}|c_{-1}|^4 + \right.$$

$$\left. + W^2_1|a|^2|c_1|^2 + \frac{1}{2}W^2_2|a|^4\right\}. \tag{2}$$

Здесь c_α — амплитуды неустойчивых мод, a — половинной субгармоники. Уравнения (1) обезразмерены таким образом, что невозмущенный гамильтониан описывает распады в подсистеме 1, а возмущение (выражение в фигурных скобках в (2)) связано с линейной неустойчивостью и четырехволновыми процессами. Малый параметр возмущения определяется выражением:

$$\epsilon \propto (U^1\gamma)^{1/2}/V^1 \ll 1, \tag{3}$$

где γ — инкремент линейной неустойчивости, а V^1 и U^1 — матричные элементы, отвечающие соответственно за распад /5/ и нелинейный сдвиг частоты моды c_1, масштаб времени в (1): $\tau = \gamma t/\epsilon$.

Для анализа решений системы (1) сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} c_1 &= (N + M - P)^{1/2}\exp[-i(\psi + \phi)/2], \\ c_{-1} &= (N - M)^{1/2}\exp[-i(\psi - \phi)/2], \\ a &= (2P)^{1/2}\exp[-i(\psi + \phi)/4 - i\chi/2]. \end{aligned} \tag{4}$$

Система (1) имеет два интеграла движения H и M. В дальнейшем положим $M = 0$.

Невозмущенная задача имеет устойчивое стационарное решение:

$$P = 2N/3,\ \chi = 0. \tag{5}$$

Так как система интегрируема ($\epsilon = 0$), то можно стандартным образом ввести переменные "действие—угол" /6/. В окрестности стационара (5) найдем явное выражение "старых" переменных P, ϕ, χ через "новые" I, ϑ, $\overline{\phi}$ в виде ряда по степеням $\delta = 4/27 - H_0^2/N \ll 1$.

Невозмущенный гамильтониан в "новых" переменных записывается:

$$H_0 = N^{3/2}\left\{2/3\sqrt{3} + I/N + (11/24\sqrt{3})(I/N)^2 + \ldots\right\}.$$

Так как резонансов между степенями свободы нет, усредним возмущение H_1 по быстрой переменной ϑ, которая описывает воздействие распадов на динамику линейной неустойчивости. В результате получим новые уравнения движения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\tau} &= (N/3)^{1/2} + \epsilon[(2/\pi)\sin(\pi/\sqrt{3})\cos\overline{\phi} + N((1/9)W^1_1 + W^1_{-1} + (8/9)W^2_1 + \\ &\quad + (16/9)W^2_2)], \\ \frac{\partial N}{\partial\tau} &= \epsilon(2/\pi)N\sin(\pi/\sqrt{3})\sin\overline{\phi}. \end{aligned} \tag{6}$$

Анализ системы (6) показывает, что для начальных значений $N \propto \epsilon^2 \ll 1$ в системе возникает устойчивое стационарное решение:

$$N^0 = 3\epsilon^2(2/\pi)^2\sin^2(\pi/\sqrt{3}), \tag{7}$$

тогда как в отсутствие распадов насыщение амплитуды происходит при значении $N = 2/(W^1_1 + W^1_{-1})$.

Рассмотрим реализацию изложенной выше теоретической модели на примере пучково-плазменной системы. Пусть имеется тонкий трубчатый электронный пучок радиуса r_1, который распространяется в металлическом волноводе радиуса R с осью, параллельной оси z. Пусть электронная плазма представляет собой коаксиальный с пучком бесконечно тонкий цилиндр радиуса r_{-1}, а на систему наложено достаточно сильное магнитное поле, параллельное оси волновода, так что электроны пучка и плазмы замагничены. Тепловым разбросом скоростей электронов плазмы и пучка пренебрегаем.

Задачу решаем в цилиндрической геометрии, учитывая аксиальную несимметричность возмущений, т.е. в линейном приближении ищем все величины в виде $f(r)\cdot\exp(-i\omega t + ikz + il\phi)$.

Линеаризуя на фоне стационара $v_{-1} = 0$, $v_1 = u$, $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^{(0)}$ уравнения движения частиц пучка и плазмы в приближении холодной гидродинамики и используя уравнения Максвелла для ТМ-волны, получаем дисперсионное уравнение вида:

$$[(\omega - ku)^2 - \Omega_1^2(\omega, k)]\,[\omega^2 - \Omega_{-1}^2(\omega, k)] = \lambda^2\Omega_1^2\Omega_{-1}^2.$$

Здесь индекс $\alpha = -1, 1$ нумерует величины, относящиеся соответственно к плазме и пучку, σ_α — поверхностные плотности числа частиц, $\sigma_\alpha^{(0)}$ — компенсирующие поверхностные плотности ионов, v_α — z-компонент скоростей, u — невозмущенная скорость пучка.

Рамановский режим неустойчивости, когда $\lambda^2 \ll \Omega_\alpha^2$, реализуется для коротковолновых колебаний $kr_\alpha \gg 1$, $kR \gg 1$. В окрестности точки пересечения медленной пучковой и быстрой плазменной волн $(l = 0)$: $k_1 = g_{-1}/u^2$, $\omega_1 = g_{-1}/u$ имеются две слабо связанные неустойчивые волны, нарастающие с максимальным инкрементом $\gamma^2 = (1/2)\eta(g_{-1}/u)^2\exp(-2k_1|r_1 - r_{-1}|)$, где $\eta = (g_1/g_{-1})^{1/2} \ll 1$, $g_\alpha = 2\pi e^2\sigma_\alpha^{(0)}/m$.

Рассмотрим распад аксиально-симметричной медленной пучковой волны на половинную субгармонику с $l = (\sqrt{3}/2)k_1r_1$ и амплитудой $a/\sqrt{2}$ /5/. Динамика процессов, происходящих в пучково-плазменной системе, описывается уравнениями (1) с гамильтонианом (2). При этом физические переменные связаны с безразмерными комплексными амплитудами огибающих волн следующими соотношениями:

$$\delta\sigma_1 = -i\sigma_1^{(0)}[3\gamma\eta u/2g_1]^{1/2}\Big\{c_1\exp(-i\omega_1 t + ik_1 z) +$$

$$+\frac{a}{2}\exp(i\omega_1 t/2 - ik_1 z/2 + il\phi) + \frac{a}{2}\exp(i\omega_1 t/2 - ik_1 z/2 - il\phi)\Big\},$$

$$\delta\sigma_{-1} = -i\sigma_{-1}^{(0)}\,\frac{1}{2}\,(3r_1\gamma u/r_{-1}g_{+1})^{1/2}\eta^* c_{-1}\exp(-i\omega_1 t + ik_1 z).$$

Параметр возмущения ϵ (3) выражается через параметры системы следующим образом:

$$\epsilon = (\sqrt{2}/3)^{1/2}\eta^{-1/4}\exp[g_{-1}|r_{-1} - r_1|/2u^2] \ll 1. \qquad (8)$$

Нелинейные сдвиги частот для медленной пучковой и быстрой плазменной волн равны соответственно: $W^1_1 = -1$, $W^1_{-1} \approx -0{,}17\ (v_{-1}/v_1)^3$.

Таким образом, если в пучково-плазменной системе для пучковой подсистемы выполняются распадные условия, то динамика насыщения пучково-плазменной неустойчивости существенно меняется: во-первых, в системе реализуется устойчивое стационарное состояние $|c_1|^2 \propto N^0/3$, $|c_{-1}|^2 \propto N^0$, $|a|^2 \propto 4N^0/3$; во-вторых, если в начале взаимодействия система находилась вблизи стационара (7), то распадные процессы стабилизируют неустойчивость при $N^0 \propto \epsilon^2$, где ϵ определяется выражением (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Hasegawa A. Phys. Rev., **169**, 204 (1968).
2. Игнатов А.М. ЖЭТФ, **87**, 1652 (1984).
3. Кузелев М.В., Рухадзе А.А. Электродинамика плотных электронных пучков в плазме, М., Наука, 1990.
4. Zakharov V.E. et al. Phys. Rep., **129**, 285 (1985).
5. Игнатов А.М., Келехсаева И.А. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 10, 33 (1989).
6. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика, М., Мир, 1984.

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 17 июня 1991 г.