Краткие сообщения по физике № 9 — 1991 г.

УДК 530.145+535.33

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ su(2) И su(1,1) В ЗАДАЧАХ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

В.П. Карасев

Получены и проанализированы нелинейные обобщения (деформации) алгебр Ли su(2) и su(1,1), которые являются алгебрами динамической симметрии некоторых моделей квантовой оптики (моделей с внутренними симметриями и n-фотонных обобщений модели Дикке).

В последние годы арсенал математических средств теоретической физики пополнился новыми алгебраическими структурами (квантовые группы /1/, W-алгебры /2, 3/, алгебры Казимира /4-6/ и т.д.), которые являются нелинейными обобщениями (деформациями) обычных (линейных) алгебр Ли. Эти объекты, называемые нелинейными или деформированными алгебрами Ли G_d /6/, порождаются некоторой ассоциативной алгеброй A(B) с множеством $B = \{T_a\}$ генераторов T_a, удовлетворяющих перестановочным соотношениям (ПС) вида

$$[T_a, T_b] = f_{ab}(\{T_c\}), \tag{1}$$

где $f_{ab}(...)$ — некоторые функции генераторов T_c, задаваемые степенными рядами. До недавнего времени деформированные алгебры Ли широко изучались в основном в контексте моделей квантовой теории поля и статистической физики /1-6/. Однако результаты работ /7-10/ указывают на возможность применения таких структур и в других областях физики.

Цель настоящей работы* — показать, что специфические (неквантовые, ср. /1/) деформации алгебр Ли su(1,1) и su(2) возникают естественным образом как алгебры динамической симметрии /9, 11/ в некоторых моделях квантовой оптики, управляемых гамильтонианами

$$H_1 = \omega a^+ a + g_1 (a^+)^n + g_1^* (a)^n, \; [a, a^+] = 1, \tag{2а}$$

$$H_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{n} \omega_i a^+_{i\alpha} a_{i\alpha} + f_1 X^+_{12...n} + f_1^* X_{12...n}, \tag{2б}$$

$$H_3 = 2\epsilon S_0 + \omega a^+ a + g_2 S_+ (a)^n + g_2^* S_- (a^+)^n, \tag{2в}$$

$$H_4 = 2\epsilon S_0 + \sum_{i=1}^{2} \omega_i \sum_{\alpha=1}^{2} a^+_{i\alpha} a_{i\alpha} + f_2 S_+ X_{12} + f_2^* S_- X^+_{12}, \tag{2г}$$

---

* Основные идеи и результаты данной работы были доложены автором на 1-ой Международной конференции по физике им. А.Д. Сахарова (Москва, май 1991) и 2-ом Вигнеровском симпозиуме (Гослар, ФРГ, июль 1991).

где $X^{+}_{12\ldots n} = \Sigma\ \epsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}\ a^{+}_{1\alpha 1}\ldots a^{+}_{n\alpha n}$, $X_{12\ldots n} = (X^{+}_{12\ldots n})^{+}$, $\epsilon^{\cdots}$ — полностью антисимметрический тензор /10/, S_α — генераторы обычной алгебры su(2), g_i и f_i — числовые факторы. Гамильтонианы H_1 и H_2 задают модели с внутренними $C_n = \{\exp\ [2\pi ir/n],\ r = 0,1,\ldots,n-1\}$ и su(n)—симметриями соответственно и описывают n-фотонные процессы "сжатия" /12, 13/ и процессы рождения и поглощения su(n)-инвариантных мультифотонных кластеров /10/. Гамильтонианы H_3 и H_4 задают n-фотонные обобщения точечной модели Дикке /9, 10, 14/.

Ниже будет показано, что гамильтонианы H_1 и H_2 являются линейными функциями генераторов некоторых деформаций алгебры su(1,1), а гамильтонианы H_3 и H_4 зависят также линейно от генераторов деформаций алгебры su(2). Все эти деформации имеют однотипную структуру и принадлежат к классу алгебр Казимира. Поэтому достаточно подробное рассмотрение дано для гамильтониана H_1, тогда как для H_2, H_3 и H_4 выписаны основные структурные соотношения и указаны их специфические особенности.

Вводя обозначения $Y_0 = a^{+}a/n$, $Y_{+} = (a^{+})^n$, $Y_{-} = (a)^n$, получаем из (2а), что H_1 является линейной функцией генераторов Y_α, $\alpha = \pm,0$, алгебры $su^{(n)}(1,1)$ с ПС:

$$[Y_0, Y_{\pm}] = \pm Y_{\pm}, \tag{3а}$$

$$[Y_{-}, Y_{+}] = f_{n-1}(Y_0) = \Delta_x g_n(x)\big|_{x=Y_0},\ g_n(Y_0) = (nY_0)^{(n)}, \tag{3б}$$

где $A^{(B)} \equiv A!/(A-B)! = A(A-1)\ldots(A+1-B)$, $\Delta_x f(x) = f(x+1) - f(x)$, которые при $n = 2$ совпадают с ПС для обычной алгебры su(1,1), а при $n > 2$ являются их деформациями. Согласно /6/, алгебра $su^{(n)}(1,1)$ принадлежит к классу алгебр Казимира /4,5/, поскольку ее оператор Казимира

$$C_2(su^{(n)}(1,1)) = -\,Y_{+}Y_{-} + g_n(Y_0),\ g_n(Y_0) = (nY_0)^{(n)} \tag{4}$$

является деформацией оператора Казимира $C_2(1,1) = C_2(su(1,1))$ обычной алгебры su(1,1) /11/. В силу тождества

$$Y_{+}Y_{-}\big|_{L_F(1)} \equiv (a^{+})^n(a)^n = (a^{+}a)^{(n)} \equiv (nY_0)^{(n)} \tag{5}$$

получаем из (4), что на одномодовом фоковском пространстве $L_F(1) = \mathrm{Span}\ \{(a^{+})^r|0\rangle\}$ имеет место тождество

$$C_2(su^{(n)}(1,1)) \equiv 0\ \forall\ |\rangle \in L_F(1). \tag{6}$$

Отсюда (вследствие (4) — (6)) следует, что $L_F(1)$ расщепляется в конечную прямую сумму

$$L_F(1) = \Sigma_{\oplus\, r=0}^{\,n-1}\ L(l(r)) \tag{7}$$

$su^{(n)}(1,1)$ — инвариантных подпространств $L(l(r))$ — носителей n унитарных неприводимых представлений (УНП) $D^{l(r)}$ алгебры $su^{(n)}(1,1)$, определяемых младшими весами $l(r) = r/n$, $r = 0,1,...,n-1$ и младшими векторами

$$|l(r)\rangle = (a^+)^r|0\rangle,\ Y_0|l(r)\rangle = l(r)|l(r)\rangle,\ Y_-|l(r)\rangle = 0. \tag{8}$$

Согласно анализу /6/, теория представлений алгебр Казимира строится по аналогии с обычными алгебрами Ли /11/. Поэтому приведем здесь лишь явные выражения

$$|s;r\rangle = [(r+ns)!]^{-1/2}(Y_+)^s|l(r)\rangle, \tag{9a}$$

$$|\lambda;r\rangle = c(\lambda)\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s[(r+ns)^{(ns)}]^{-1/2}|s;r\rangle,\ Y_-|\lambda;r\rangle = \lambda|\lambda;r\rangle \tag{9б}$$

для ортонормированных $|s;r\rangle$ и обобщенных когерентных (типа собственной функции /11/) $|\lambda;r\rangle$ состояний УНП $D^{l(r)}$. (Отметим, что обобщенные когерентные состояния $|\alpha;r\rangle = \exp(\alpha Y_+ - \alpha^* Y_-)|l(r)\rangle$ орбитного типа при $n > 3$ сингулярны /12, 13/.)

Аналогичный анализ для H_2 дает другую деформацию $su^{(1^n)}(1,1)$ алгебры $su(1,1)$, задаваемую генераторами $X_+ = X^+_{12...n}$, $X_- = X_{12...n}$, $X_0 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n} a^+_{i\alpha}a_{i\alpha}$ с ПС вида

$$[X_0, X_\pm] = \pm X_\pm, \tag{10a}$$

$$[X_-, X_+] = \varphi_{n-1}(X_0;\{C_k(n)\}) = \Delta_x\psi_n(x;\{C_k(n)\})|_{x=X_0},\ [C_k(n), X_\alpha] = 0, \tag{10б}$$

где $\varphi_{n-1}(X_0;...)$ — полином (n—1)-ой степени по X_0, который дополнительно зависит от операторов Казимира $C_k(n) = C_k(su_{inv}(n))$ алгебры $su_{inv}(n)$ с генераторами /8, 10/

$$\tilde{E}_{ij} = E_{ij} - \delta_{ij}n^{-1}\sum_{j=1}^{n}E_{jj},\ E_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{n}a^+_{i\alpha}a_{j\alpha};$$

например, $\varphi_2(N;...) = 3!(N+1)^{(1)}+3(N+1)^{(2)}-(1/2)C_2(3)$. Эта специфика $su^{(1^n)}(1,1)$ определяет и другие ее особенности по сравнению с деформацией $su^{(n)}(1,1)$. В частности, фоковское пространство $L_F(n^2)$ модели (2б) разлагается в **бесконечную** (в отличие от (7)) прямую сумму

$$L_F(n^2) = \sum_{\langle p_i\rangle}\oplus L(p_1,...,p_{n-1}) \tag{11}$$

пространств-носителей $L(p_1,...,p_{n-1})$ УНП одновременно алгебр $su^{(1^n)}(1,1)$, $su_{inv}(n)$ и алгебры внутренней симметрии /10/. Оператор Казимира $C_2(su^{(1^n)}(1,1)) = - X_+X_- + \Psi_n(X_0;...)$ на $L_F(n^2)$ не равен тождественно нулю, а зависит от $C_k(n)$; например, имеем

$$C_2(su^{(1^3)}(1,1))\big|_{L_F(n^2)} = C_2(3) - (1/3)C_3(3). \tag{12}$$

Аналогичное рассмотрение для H_3 и H_4 показывает, что их динамические алгебры в линейной реализации /9/ содержат в качестве подалгебр деформации алгебры su(2), которые, как и $su^{(1^n)}(1,1)$, принадлежат к алгебрам Казимира с инвариантными операторами в качестве дополнительных параметров.

Для гамильтониана H_3 соответствующая деформация $su^{(n)}(2)$ порождается генераторами $V_0 = S_0$, $V_+ = S_+(a)^n$, $V_- = S_-(a^+)^n$ с нетривиальным (типа (10б)) ПС

$$[V_+,V_-] = \Delta_x \tilde{g}(x;C_2(2),R)\big|_{x=V_0},\ \tilde{g}(x;...) = [x^{(2)} - C_2(2)](nR - nx + n)^{(n)} \tag{13}$$

и оператором Казимира

$$C_2(su^{(n)}(2)) = V_+V_- + \tilde{g}(V_0;C_2(2),R), \tag{14}$$

где $R = V_0 + a^+a$ и $C_2(2) = S_+S_- + S_0^{(2)}$ — интегралы движения задачи (2в), коммутирующие с V_α.

Для гамильтониана H_4 деформированная алгебра $su^b(2) \equiv su^{(1^2)}(2)$ имеет генераторы $V_+ = S_+X_{12}$, $V_- = S_-X_{12}^+$, $V_0 = S_0$ с нетривиальным ПС

$$[V_+,V_-] = 2\{V_0(2 + \tilde{R} - V_0)^{(2)} + V_0[C_2(2) + C_2(1,1)] + (1 + \tilde{R} - V_0)[C_2(2) - (V_0+1)^{(2)}]\} \tag{15}$$

и оператором Казимира

$$C_2(su^b(2)) = V_+V_- + V_0^{(4)} + 2V_0^{(3)}(1 - \tilde{R}) + V_0^{(2)}[\tilde{R}^{(2)} - C_2(2) - C_2(1,1)] + 2V_0(1 + \tilde{R})C_2(2), \tag{16}$$

где $C_2(2)$, $\tilde{R} = V_0 + \sum_{i,\alpha}(a^+_{i\alpha}a_{i\alpha})/2$ и $C_2(1,1) = - X_{12}^+X_{12} + (1 + (1/2)\sum_{i,\alpha} a^+_{i\alpha}a_{i\alpha})^{(2)}$ — интегралы движения модели (2г), коммутирующие с V_α.

На пространстве $L_F(1)\otimes L_M$ ($L_M = \mathrm{Span}\{\Pi_a |\pm\rangle (a)\}$) состояний модели (2в) (см. определения в /9, 14/) имеет место тождество $C_2(su^{(n)}(2)) \equiv 0$, откуда следует, что на $L_F(1)\otimes L_M$ реализуются УНП $su^{(n)}(2)$ только со старшими весами $h = j$ или $h = r$, где $r \in \mathrm{Spec}\ R$ и $j(j+1) \in \mathrm{Spec}\ C_2(2)$. В то же время $C_2(su^b(2)) = C_2(2)[-C_2(1,1) + (\tilde{R} + 2)^{(2)}]$ на пространстве $L_F(2^2)\otimes L_M$ состояний модели (2г), что приводит к существованию на $L_F(2^2)\otimes L_M$ УНП $su^b(2)$ со старшими весами, определяемыми корнями алгебраического уравнения четвертой степени (ср. (16)).

Полученные результаты позволяют использовать общую теорию представлений деформированных алгебр su(2) и su(1,1) /6/ для решения задач с гамильтонианами (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Zachos C.K. In: Symmetries in Sciences V, eds. B. Gruber, L.C. Biedenharn, H.D. Doebner, N.Y., Plenum, 1991, p. 593.
2. Замолодчиков А.Б. Теор. мат. физ., **65**, 347 (1985).
3. Fateev V.A., Lukyanov S.I. Int. J. Mod. Phys., **A3**, 507 (1988).
4. Bouwknegt P. et al. Nucl. Phys., **B304**, 348, 371 (1988).
5. Schoutens K., Sevrin A., van Nieuwenhuizen P. Com. Math. Phys., **124**, 87 (1989).
6. Rocek M. Phys. Lett., **B255**, 554 (1991).
7. Gal'bert O.F., Granovskii Ya.I., Zhedanov A.S. Phys. Lett., **A153**, 177 (1991).
8. Karassiov V.P. Lect. Notes Phys. (Springer), **382**, 493 (1991).
9. Карасев В.П. Труды ФИАН, **191**, 120 (1989).
10. Карасев В.П. Препринт ФИАН №137, М., 1990.
11. Барут А.О., Рончка Р. Теория представлений групп и ее приложения. М., Мир, 1980.
12. Elyutin P.V., Klyshko D.N. Phys. Lett., **A149**, 241 (1990).
13. Katriel J. et al. J. Opt. Soc. Am., **B4**, 1728 (1987).
14. Kozierowski M., Mamedov A.A., Chumakov S.M. Phys. Rev., **A42**, 1762 (1990).

Поступила в редакцию 30 июля 1991 г.