Краткие сообщения по физике № 11,12 — 1991 г.

УДК 532.5.013; 536.42

ПРОСТОЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ СФЕР С ТОРМОЖЕНИЕМ В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ С ЧИСЛОМ РЕЙНОЛЬДСА ДО 400

Ю. А. Меркульев

Получены алгебраические выражения для расчета установившейся скорости, числа Рейнольдса, критерия Бонда и коэффициента сопротивления сферы при движении в вязкой среде как функции безразмерного радиуса.

В последние годы предпринимались попытки математически промоделировать процессы изготовления микробаллонов, в том числе лазерных мишеней /1—3/. Как правило, все методы изготовления /4/ полых микросфер-микробаллонов сводятся к нагреванию и вспениванию микросфер в процессе их движения в газе (реже в жидкости).

Чтобы знать время нахождения микросферы в горячей зоне, коэффициент теплопередачи, зависящий от числа Рейнольдса Re, критерии Вебера или Бонда, характеризующие действие давления торможения на форму сферы, и т.п., необходимо рассчитывать скорость в каждый момент времени U или установившуюся скорость U_t, когда вес сферы равен силе сопротивления газа. Скорость U_t определяет время t_t и высоту H_t, которые характеризуют соответствующие масштабы установления скорости.

В процессе изготовления микросфера переходит из холодной среды в горячую и опять в холодную, изменяет свой радиус и эффективную плотность, поэтому расчеты U_t повторяются многократно. Обычно используют экспериментальную зависимость коэффициента сопротивления Cd от числа Рейнольдса, представляемую в виде графика или таблицы. Используется тот факт, следующий из определения Cd, что комбинация $CdRe^2$ не зависит от скорости:

$$CdRe^2 = \frac{32}{3}\,\frac{(\rho - \rho_g)\rho_g gR^3}{\eta^2},$$

где ρ и R — плотность и радиус сферы, ρ_g и η — плотность и динамическая вязкость газа, g — ускорение свободного падения. Построив график $CdRe^2(Re)$ и рассчитав комбинацию $CdRe^2$ для данного варианта технологии, по графику находят Re и затем U_t. Иногда используют график зависимости $(ReCd)^{1/3}$ от $(CdRe^2)^{1/3}$ (корреляция Ценце) /5/, поскольку $Re/Cd = (3/4)\rho_g^2U^3/\eta(\rho - \rho_g)g$.

В этом случае, найдя по $(CdRe^2)^{1/3}$ значение $(Re/Cd)^{1/3}$, рассчитывают значение скорости U. Мы использовали такой же подход, но зависимость безразмерной скорости $y = U/U^*$ от безразмерного радиуса $x = R/R^*$ выбирали таким образом, чтобы ее асимптотика при $Re \to 0$ давала скорость Стокса. При этом

$$R^* = [\eta^2/g\rho_g(\rho - \rho_g)]^{1/3}, \tag{1}$$

$$U^* = (4/9)\,[(\rho - \rho_g)g\eta/\rho_g^2]^{1/3}. \tag{2}$$

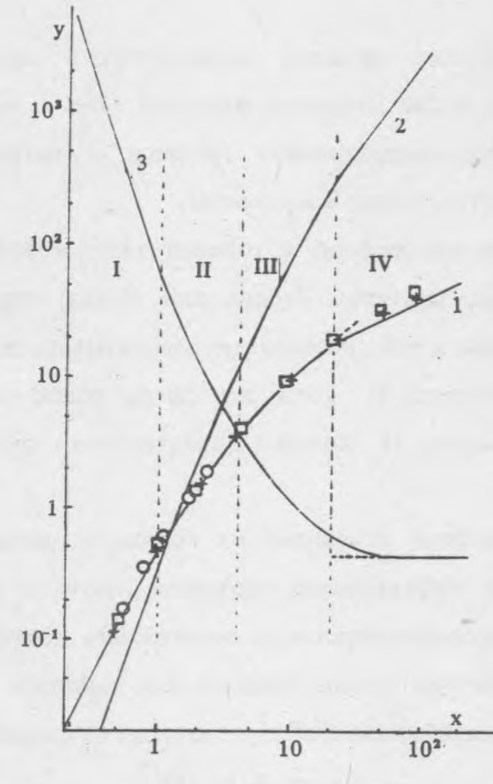

Рис. 1. Зависимости от безразмерного радиуса сферы x безразмерной скорости y (1), числа Рейнольдса Re (2), коэффициента сопротивления газа Cd (3). Римскими цифрами обозначены области x, где Cd описывается выражениями: I — 24/Re; II — $16{,}3/Re^{2/3}$; III — $10{,}8/Re^{0{,}5}$; IV — 0,445. На кривой y(x) приведены данные, взятые из расчетов: о — для стеклянной оболочки /3/, □ — для сфер и оболочек при 700 К /6/, + — для стеклянных микросфер при 300 К /6/.

Зависимость y(x) в области изменения x от 0 до 20 хорошо описывается формулой $y(x) = x^2/\sqrt{4 + x^2}$ (рис. 1). На этом же рисунке приведены результаты расчетов, выполненных старым способом /6/, и взятые из работ /3, 6/. Величины R^* и U^* соответствуют значению числа

Рейнольдса 0,4, которое обычно используется как граница области применимости закона Стокса. Число Рейнольдса для $x \leq 20$ можно рассчитать по формуле $Re = (8/9)x^3/\sqrt{4 + x^2}$. Зависимость коэффициента сопротивления Cd от x имеет вид: $Cd = 13,5(4 + x^2)/x^3$. В области изменения x от 20 до 2000 с хорошей точностью выполняется закон Ньютона $Cd = 0,445$, и здесь $y = 4x^{1/2}$, $Re = 8x^{3/2}$. На рис. 1 видно, как сшиваются два решения. Неточность при таком представлении возникает в области $20 < x < 25$, где значения y и Re занижены на 10—15%. В случае, когда из сплошной микросферы с радиусом R_s образуется тонкостенная полая микросфера радиуса R_0 с толщиной стенки h (аспектное отношение $a_s = R_0/h$), можно показать, что радиус увеличивается в соотношении $R_0/R_s = (a_s/3)^{1/3}$. Поэтому установившаяся скорость для оболочки меньше, чем для сферы, в $(3/a_s)^{1/3}$ раз. Число Рейнольдса для установившегося движения сферы и оболочки одинаковое.

Отметим, что при вспенивании оболочка летит со скоростью сферы, и число Рейнольдса в начальный момент времени у оболочки выше, чем у сферы. При торможении скорость падает и число Рейнольдса восстанавливается. Давление тормозящего газа искажает форму сферы или пузыря. Для оценки этого влияния вводится критерий Вебера $We = \rho_g RU^2/\sigma$, где σ — поверхностное натяжение. Этим критерием можно пользоваться при неустановившемся движении. После установления скорости критерий Вебера переходит в критерий Бонда Bo:

$$Bo = \frac{2}{3}\,\frac{(\rho - \rho_0)\,gR^2}{\sigma}. \tag{3}$$

Подставив выражения (1) и (2) в (3), получим зависимость от безразмерного радиуса $Bo = (3/2)(\eta U^*/\sigma)x^2$. Стоящий перед x^2 множитель похож на критерий Онезорге для капиллярного распада струи жидкости с той лишь разницей, что динамическая вязкость η относится к окружающей вязкой среде, а не к жидкой капле. При этом скорость U^*, как правило, ниже скорости струи. Для большинства технологических вариантов критерий $\eta U^*/\sigma$ составляет $(0,3—3,0)\cdot 10^{-3}$, что для $x < 10$ приводит к устойчивости формы капли или оболочки по отношению к давлению тормозящей внешней среды.

Таким образом, все расчеты движения микросфер в газе резко упрощаются и сводятся к вычислению простых алгебраических выражений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Compbell Y. H., Grins Y. C., Poco Y. F. In: 1982 Laser Program Annual Report UCRL-50021, Livermore Lawrence National Laboratory, 1983.
2. Дороготовцев В. М. и др. В сб. Гидродинамика и тепломассообмен в невесомости. Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева, Новосибирск, 1988, с. 103.
3. Compbell Y. H., Grins Y. C., Poco Y. F. Rept. UCRL-53516, Livermore Lawrence National Laboratory, 1983.
4. Райсн Б., Тарди Б. Полые сферические наполнители. Наполнители для полимерных материалов. Справочное пособие, под ред. Каца Г. С. и Милевски В. М., Химия, 1981, с. 370.
5. Протодьяконов И. О., Чесноков Ю. Г. Гидродинамические процессы в химической технологии. Л., Химия, 1987, с. 217.
6. Исаков А. И. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 6, 8 (1976).

Поступила в редакцию 4 ноября 1991 г.