Краткие сообщения по физике № 11,12 — 1991 г.

УДК 539.186.2

УПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ОДНОРОДНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В.И. Крылов

На примере упругих соударений быстрых электронов с заряженной частицей показано, что в борновском приближении сечение рассеяния в слабом (по сравнению с атомным) однородном электрическом поле может заметно отличаться от резерфордовского. В частности, в нем проявляются анизотропия, связанная с внешним полем, и осцилляции, вызванные интерференционными эффектами.

В физике плазмы и газового разряда при описании процессов, связанных с упругими столкновениями частиц во внешнем электрическом поле, обычно используют резерфордовское сечение рассеяния. Однако, как показано ниже, найденное в борновском приближении сечение упругого рассеяния быстрых электронов заряженной частицей даже в слабом (по сравнению с атомным) однородном электрическом поле может заметно отличаться от резерфордовского. Объясняется это, по крайней мере, двумя причинами: 1) зависимостью сечения как от волнового вектора, определяющего микроскопическую плотность потока относительного движения рассеивающихся частиц (волновая функция которых не является плоской волной в макроскопической области пространства), так и от несовпадающего с ним "локального волнового вектора", появление которого обязано тем, что в микроскопической области эффективного взаимодействия частиц, их волновая функция фактически совпадает с плоской волной; 2) существованию состояний системы, которые описываются волновыми функциями в виде стоячих волн /1-3/.

Пусть рассеивающая частица массы m_p и зарядом e_p находится во внешнем однородном и постоянном электрическом поле с напряженностью $\boldsymbol{\epsilon}$, направленной вдоль оси z декартовой системы координат: $\boldsymbol{\epsilon} = (0, 0, -\epsilon)$. Поле имеется в области пространства $z > -L_z$ (L_z — макроскопическая величина, окончательное определение которой дано ниже), а на его границе расположен источник монохроматического потока электронов (m_e,$-e$ — масса и заряд электрона).

Сечение рассеяния будем искать в нерелятивистском борновском приближении, выбирая в качестве возмущения потенциальную энергию кулоновского взаимодействия $V(\mathbf{r}_e, \mathbf{r}_p) = -ee_p|\mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p|^{-1}$. Следует отметить, что в однородном электрическом поле решение невозмущенного уравнения

Шредингера сводится к известным результатам /1/, как в лабораторной системе отсчета (радиусы-векторы частиц $\mathbf{r}_e$ и $\mathbf{r}_p$), так в координатах центра масс: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_e - \mathbf{r}_p$, $\mathbf{R} = (m_e\mathbf{r}_e + m_p\mathbf{r}_p)M^{-1}$ ($M = m_e + m_p$, $\mathbf{r} = (x,y,z)$, $\mathbf{R} = (X,Y,Z)$). Однако анализ /4/ показывает, что удобнее использовать координаты $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$, в которых для выбранного вида внешнего поля можно провести разделение переменных в уравнении Шредингера для всех x, y, X, Y и для z и Z, удовлетворяющих условиям:

$$-L_z < Z + (m_p/M)z; \quad -L_z < Z - (m_e/M)z. \tag{1}$$

В этом случае волновая функция системы $\psi(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \psi_r(\mathbf{r})\psi_R(\mathbf{R})$, где $\psi_r(\mathbf{r})$ описывает внутреннее движение частиц, а $\psi_R(\mathbf{R})$ — движение их центра инерции, среднюю скорость которого в продольном (относительно поля) направлении считаем значительно меньше относительной скорости частиц. Это позволяет не рассматривать движение центра инерции, и потенциал внешнего поля выбрать так, чтобы точка (на оси z), в которой он равен нулю, совпадала с центром инерции системы, что равносильно $Z = 0$. Расстояние от этой точки до границы поля определим как L_z. Тогда, как следует из (1), $z \in (-L,\ m_pL/m_e)$, причем $L = ML_z/m_p$. Благодаря тому, что область изменения z ограничена, можно построить функции $\psi_r(\mathbf{r}) \equiv \psi_k(\mathbf{r})$, обеспечивающие стационарную отличную от нуля плотность потока частиц, если энергия их продольного движения

$$E_z > e_r\epsilon L \quad (e_r = (em_p + e_pm_e)M^{-1}). \tag{2}$$

Для этого необходимо использовать обе функции Эйри /5/, удовлетворяющие невозмущенному уравнению для $\psi_r(\mathbf{r})$. Используя их асимптотические представления /5/, находим:

$$\psi_{\mathbf{k}} = (A_{\mathbf{k}}/s^{1/4})\exp\,[i(2k_zs^{3/2}/3|k_z| + \mathbf{k}_\perp\mathbf{r})], \tag{3}$$

где $s = z/l + E_z/e_r\epsilon l$, $A_{\mathbf{k}} = \sqrt{m|k_z|\,l/\hbar k}$, $m = m_em_p/M$, $l = (\hbar^2/2me_r\epsilon)^{1/3}$; $E_z = e_r\epsilon L + \hbar^2k_z^2/2m$, $E_k = E_z + \hbar^2k_\perp^2/2m$ — энергия относительного движения частиц, вектор $\mathbf{k}$ определяет направление и величину микроскопической плотности тока, $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$. Функция (3) нормирована на плотность потока, равную единице. Из определения s и E_z следует, что выражение (3) имеет смысл, если выполнено неравенство $(k_zl)^2 >> 1$, не противоречащее условию применимости борновского приближения /1/ $(e^2/\hbar)(m/2E_z)^{1/2} << 1$. Из условия ортогональности ψ_k при различных $\mathbf{k}$ следует связь между A_k, элементом объема d^3k и числом квантовых состояний $dn_{\mathbf{k}} = (|k_z|\,l/8\pi^3A_k^2)d^3k$.

Используя волновые функции (3), находим дифференциальное сечение для перехода в состояния, удовлетворяющие условию (2). В выражение для дифференциального сечения рассеяния

$$d\sigma_{\mathbf{k}} = (2\pi/\hbar) \left| \langle \mathbf{k}|V|\mathbf{k}_0\rangle \right|^2 \delta(E_{\mathbf{k}} - E_{\mathbf{k}_0}) dn_{\mathbf{k}} \tag{4}$$

входит матричный элемент кулоновской энергии $\langle \mathbf{k}|V|\mathbf{k}_0\rangle$ /1/, который можно вычислить приближенно, если в волновых функциях (3) пренебречь зависимостью от z в амплитуде $s^{-1/4}$, а в экспоненте заменить $(2/3)s^{3/2}$ на выражение $(2/3)(E_z/e_r\epsilon l)^{3/2} + z(2mE_z)^{1/2}/\hbar$. (Величина $k_z(2mE_z)^{1/2}/\hbar|k_z|$ и есть продольная составляющая "локально волнового вектора", о котором упоминалось вначале. В результате вычислений и интегрирования (4) по $E_{\mathbf{k}}$ получим:

$$d\sigma = \frac{2(ee_p)^2 m|k_{0z}k_z|}{\hbar^2 q^4 \sqrt{E_{0z}E_z}} d\theta, \tag{5}$$

где $\mathbf{q} = \boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}_0$, $\boldsymbol{\kappa} = (\mathbf{k}_\perp, k_z(2mE_z)^{1/2}/\hbar|k_z|)$, $E_{0z} = e_r\epsilon L + \hbar^2 k_{0z}^2/2m$, $d\theta$ — элемент телесного угла, в который после рассеяния попадает $\mathbf{k}$, и имеет место закон сохранения $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$.

Выражение (5) отличается от формулы Резерфорда значением $\mathbf{q}$ и множителем $|k_{0z}k_z|(E_{0z}E_z)^{-1/2}$, отражающим анизотропию пространства при наличии в нем электрического поля. В пределе $e_r\epsilon L << (\hbar k_z)^2/2m$, $(\hbar k_{0z})^2/2m$ выражение (5) переходит в формулу Резерфорда.

Рассмотрим переходы из состояний, описываемых волновой функцией (3), в состояния, для которых $E_z << e_r\epsilon L$. Тогда волновая функция конечного состояния имеет вид $\psi_r \equiv \psi_{\mathbf{k}_\perp, E_z} = A\phi(-s)\exp(i\mathbf{k}_\perp \mathbf{r})$, где $\phi(-s)$ — ограниченная при всех s функция Эйри /5/, константа определяется из условия нормирования $\psi_{\mathbf{k}_\perp, E_z}(\mathbf{r})$ на единицу и связана с числом квантовых состояний, приходящихся на интервал энергии dE_z и площадь $d^2k_\perp$, соотношением

$$dn_{\mathbf{k}_\perp, E_z} = (4\pi^3 e_r \epsilon l^2 A^2)^{-1} d^2k_\perp dE_z. \tag{6}$$

Для интервала энергии $e_r\epsilon l << E_z << e_r\epsilon L$ можно воспользоваться асимптотическим представлением $\phi(-s) \cong s^{-1/4}\sin[(2/3)s^{3/2} + \pi/4]$. Используя для s ту же замену, что и при получении формулы (5), из (4) и (6), после интегрирования по $\mathbf{k}_\perp$ в (4), получим дифференциальное сечение $d\sigma_{E_z,\varphi}$ перехода системы в состояния соответствующие интервалам энергии dE_z и угла $d\varphi$ (φ — угол между $\mathbf{k}_\perp$ и $\mathbf{k}_{0\perp}$):

$$d\sigma_{E_z,\varphi} = \frac{4(ee_p)^2 m^2 |k_{0z}|}{\hbar^4 k_0 \sqrt{E_{0z}E_z}} \left[\frac{D_+}{D_-^2} + \frac{1}{D_-}\sin\frac{4}{3}\left(\frac{E_z}{e_r\epsilon l}\right)^{3/2}\right] dE_z d\varphi, \tag{7}$$

где $D_{\pm} = (q_{\perp}^2 + \kappa_z^2 + \kappa_{0z}^2) \pm 4(\kappa_z \kappa_{0z})^2$; $k_{\perp}^2 = k_0^2 + L/l^3 - 2mE_z/\hbar^2$.

Из выражения (7) видно, что в сечении имеется осциллирующая часть, зависящая от продольной энергии относительного движения частиц. Подобные зависимости имеются в сечениях фотоионизации атомов /2, 3/ и ионизации атома электроном /6/ в однородном электрическом поле, что, по-видимому, связано с интерференцией волновых функций электронов во внешнем электрическом поле.

Таким образом, сечение рассеяния заряженных частиц во внешнем электрическом поле при определенных условиях заметно отличается от сечения в отсутствие поля. Это может оказаться существенным и в макроскопических процессах. Так анализ формулы (5) показывает, что множитель $|k_{0z}k_z|(E_{0z}E_z)^{-1/2}$ приводит к уменьшению сечения по сравнению с резерфордовским. Это может привести к более выраженному эффекту убегания электронов в плазме.

Автор признателен А.А. Рухадзе за внимание к работе и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика М., Наука, 1974.

2. Кондратович В.Д., Островский В.Н. ЖЭТФ, **79**, 395 (1980).

3. Фабрикант И.И. ЖЭТФ, **83**, 1675 (1982).

4. Крылов В.И. Краткие сообщения по физике ФИАН, №2, 33 (1991).

5. Яковлева Г.Д. Таблицы функций Эйри и их производных, М., Наука, 1969.

6. Крылов В.И. Письма в ЖТФ, **16**, 60 (1990).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 3 декабря 1991 г.