Краткие сообщения по физике № 11,12 — 1991 г.

УДК 530.145

О КВАНТОВАНИИ ВКБ ДЛЯ СОСТОЯНИЙ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЭНЕРГИЯМИ

А.С. Бруев

Дан вывод квазиклассического условия квантования для квазистационарных состояний, обусловленных неустойчивыми замкнутыми траекториями вблизи вершины потенциального барьера.

Метод ВКБ используют в задачах, связанных с нахождением квазистационарных состояний, отвечающих резонансам /1, 2/. Для состояний, связанных с неустойчивыми замкнутыми траекториями, проходящими вблизи вершины потенциального барьера, квазиклассическое условие квантования получают с использованием модифицированного приближения ВКБ, учитывающего свойство точного решения уравнения Шредингера (УШ) вблизи вершины потенциального барьера. Таким способом в работах /3—7/ были рассчитаны комплексные собственные частоты черных дыр.

В низшем приближении модифицированного метода ВКБ комплексные частоты определяют с помощью квазиклассического условия квантования

$$\int_{x_1}^{x_2} (-p^2)^{1/2} dx = i\pi(N + 1/2), \qquad (1)$$

где $N = 0, 1, 2,...$; $x_{1,2}$ — точки поворота; $p = [E - U(x)]^{1/2}$ — импульс частицы (используется система единиц, для которой $2m = \hbar = 1$). В данной работе приведен более простой вывод соотношения (1), который не требует знания точного решения вблизи вершины потенциального барьера. Для этого используем формулы связи для решений ВКБ в комплексной плоскости.

Чтобы получить эти формулы, рассмотрим асимптотические (по Пуанкаре) разложения решений $Bi(z)$ и $Ai(z)$ уравнения Эйри $d^2\Psi/dz^2 - z\Psi = 0$ в комплексной плоскости z. Используем асимптотическое разложение модифицированной функции Бесселя $K_\nu(z)$ /8/:

$$\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{z}{3}}\,K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \equiv Ai(z) = \frac{1}{2\pi z^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right)\left[\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(-1)^s\alpha_s}{z^{3s/2}} + \rho_n(\arg z)\frac{(-1)^n\alpha_n}{z^{3n/2}}\right], \qquad (2)$$

где $-\pi < \arg z < \pi$, $\alpha_s = \Gamma(1/2 + 3s)/3^{2s}\Gamma(1+2s)$, $\Gamma(z)$ — гамма-функция; явный вид функции

$\rho_n(\arg z)$ в (2), определяющей остаточный член асимптотического разложения, здесь несущественен. С помощью (2) для комбинаций из функций Эйри $Bi(z) \pm iAi(z)$, удовлетворяющих соотношению /9/ $Bi(z) \pm iAi(z) = 2\exp(\pm\pi i/6)Ai[z\exp(\pm 2\pi i/3)]$, находим следующее асимптотическое разложение:

$$Bi(z) \pm iAi(z) = \frac{1}{\pi z^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right)\left[\sum_{s=0}^{n-1} \frac{\alpha_s}{z^{3s/2}} + \rho_n\left(\arg z \pm \frac{2\pi}{3}\right)\frac{\alpha_n}{z^{3n/2}}\right], \tag{3}$$

применимое в области $-5\pi/3 < \arg z < \pi/3$, $-\pi/3 < \arg z < 5\pi/3$.

Пусть вблизи некоторой точки x_1 потенциал $U(x)$ в одномерном УШ можно представить в виде $U(x) \simeq U_0 + U_1(x - x_1)$. Рассмотрим такие решения УШ, для которых вблизи x_1 справедливо представление

$$\Psi_{1,2}(x) = Bi(z_1) \pm iAi(z_1), \tag{4}$$

где $z_1 = U_1^{-2/3}[U_0 + U_1(x - x_1) - E]$. Установим как меняется выбранное решение при переходе от значений $E = -\infty$ к значениям $E = +\infty$. Используя первый член асимптотического разложения (3) для $\arg z = \arg z_0$, $\arg z_0 \pm \pi$, при условии, что $\arg z_0$ и $\arg z_0 \pm \pi$ содержатся в указанных выше интервалах, для случая $U_1 > 0$ (классически разрешенная область расположена слева от точки поворота), находим

$$|p|^{-1/2}\exp\left(\int_{x_1}^{x} |p|dx\right) \leftarrow \Psi_{1,2}(x) \rightarrow p^{-1/2}\exp\left[\pm i\left(\int_{x}^{x_1} pdx + \pi/4\right)\right], \tag{5}$$

где $p = [E - U_0 - U_1(x - x_1)]^{1/2}$. Приведенное соотношение является формулой связи для ВКБ решений УШ, определенных при значениях x, близких к выбранной точке x_1, при условии, что вблизи точки поворота поведение волновой функции задается формулой (2). Аналитическое продолжение формулы (5) в области с произвольным значением потенциала $U(x)$ приводит к искомым формулам связи.

Подчеркнем, что формулы (5) связи ВКБ функций при выполнении условия (4) не зависят от направления. Если условие (4) не выполнено, то формулы связи можно использовать только в одном направлении: справа налево /10/. Если классически разрешенная область расположена справа от точки поворота, то в формуле (5) следует поменять пределы интегрирования.

Первую формулу в (5) применяют при расчете коэффициента подбарьерного прохождения /10/. Второй формулой (5) мы воспользуемся для нахождения условия квантования, определяющего состояния с комплексной энергией.

Пусть волновая функция частицы за потенциальным барьером имеет вид уходящей волны $\Psi(x) = Ap^{-1/2}\exp\left(i\int_{x_2}^{x} pdx\right)$, где x_2 — координата правой точки поворота, A — константа. Используя формулу связи (5), в области под барьером находим

$$\Psi(x) = A|p|^{-1/2}\exp(-i\pi/4)\exp(\int_{x}^{x_2}|p|dx). \qquad (6)$$

Потребуем, чтобы волновая функция частицы перед барьером также имела вид уходящей волны $\Psi(x) = Bp^{-1/2}\exp(i\int_{x}^{x_1} pdx)$, где x_1 — координата левой точки поворота, B — константа. Используя формулу связи (5), в области под барьером находим

$$\Psi(x) = B|p|^{-1/2}\exp(-i\pi/4)\exp(\int_{x_1}^{x}|p|dx). \qquad (7)$$

Сшивая волновые функции (6) и (7) в некоторой точке x_0, такой что $x_1 < x_0 < x_2$, получаем искомое условие квантования (1) для квазистационарных состояний.

В случае одномерного потенциала Эккарта $U(x) = U_0\exp2x(1 + \exp2x)^{-2}$, для которого известны точные выражения для комплексных энергий /11—13/, использование условия (1) приводит к формуле: $E_N^{(ВКБ)} = -(1/4)[\pm iU_0^{1/2} - (2N + 1)]^2$, где N = 0, 1, 2,... Это выражение было бы точным, если бы под корнем вместо U_0 стояло $U_0 + 1$. Этот недостаток можно устранить и получить точный результат с помощью приближения ВКБ, если учесть искажение фаз функций ВКБ, обусловленное особенностями потенциала Эккарта в комплексной плоскости /14/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мур В.Д., Попов В.С. Письма в ЖЭТФ, **51**, 499 (1990).
2. Попов В.С., Мур В.Д., Сергеев А.В. ЖЭТФ, **100**, 20 (1991).
3. Schutz B.F., Will C.M. Astrophys. Journ., **291**, L33 (1985).
4. Iyer S., Will C.M. Phys. Rev., **D35**, 3621 (1987).
5. Iyer S. Phys. Rev., **D35**, 3632 (1987).
6. Will C.M., Guin J.W. Phys. Rev., **A37**, 3674 (1988).
7. Zaslavskii O.B. Phys. Rev., **D43**, 605 (1991).
8. Boyd W.G.C. Proc. Roy. Soc. (London), **A429**, 227 (1990).
9. Справочник по специальным функциям, под. ред. М. Абрамовица, И. Стиган, М., Наука, 1979.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика, М., Наука, 1974.
11. Ferrary V., Mashhoon B. Phys. Rev. Lett., **52**, 1361 (1984); Phys. Rev., **D30**, 295 1984).
12. Blome H-J., Mashhoon B. Phys. Lett., **100A**, 231 (1984).
13. Бруев А.С. Краткие сообщения по физике ФИАН, №11, 6 (1988).
14. Бруев А.С. Краткие сообщения по физике ФИАН, №5, 22 (1991).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 4 ноября 1991 г.