Краткие сообщения по физике № 1-1990 г.

УДК 530.145

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ПЕРЕМЕННЫХ УГЛОВОЙ МОМЕНТ–УГОЛ

Д.М. Гитман, А.Л. Шелепин

Построены обобщенные когерентные состояния для переменных угловой момент – угол. Рассматриваются свойства этих состояний и вопросы перехода к классическому пределу.

Переменным угловой момент – угол в квантовой механике соответствуют операторы $\hat{L}_z$ и $\hat{\Phi}_\pm$ /1/ (как и в /1/, здесь рассматриваются операторы $\hat{\Phi}_\pm = e^{\pm i\varphi}$ ввиду необходимости учета условия периодичности по φ)

$$[\hat{L}_z, \hat{\Phi}_\pm] = \pm \hat{\Phi}_\pm, \tag{1а}$$

$$[\hat{\Phi}_+, \hat{\Phi}_-] = 0, \tag{1б}$$

$$\hat{L}_z^+ = \hat{L}_z, \; \hat{\Phi}_\pm^+ = \hat{\Phi}_\mp . \tag{2}$$

Алгебра (1) относится к разрешимым алгебрам Ли. Из коммутационных соотношений (1а) следует, что операторы $\hat{\Phi}_+$ и $\hat{\Phi}_-$ являются повышающим и понижающим в базисе из собственных функций оператора $\hat{L}_z$, $\hat{L}_z|m> = m|m>$, $\hat{\Phi}_\pm|m> = |m \pm 1>$. Подобные алгебры из трех операторов, два из которых являются повышающим и понижающим в базисе из собственных функций третьего, часто встречаются в приложениях. К ним относятся, в частности, SU(2), алгебра Гейзенберга – Вейля, а также одна из простейших квантовых алгебр:

$$\begin{array}{lll} [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hat{L}_\pm & [\hat{N}, \hat{a}^{(+)}] = (\mp)\hat{a}^{(+)} & [\hat{H}, \hat{E}_\pm] = \pm 2\hat{E}_\pm \\ [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hat{L}_z & [\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 & [\hat{E}_+, \hat{E}_-] = \mathrm{sh}(h\hat{H}/2)/\mathrm{sh}(h/2). \end{array} \tag{3}$$

Аналогично (1а) первые пары коммутационных соотношений (3) показывают, что два оператора являются повышающим и понижающим. Коммутаторы повышающего и понижающего операторов, являющиеся некоторой функцией третьего, существенно различаются.

Пространство представления группы, связанной с алгеброй Ли (1), можно реализовать как пространство периодических по φ функций $f(\varphi)$, скалярное произведение в котором задается формулой

$$<f_1(\varphi)|f_2(\varphi)> = \int_0^{2\pi} \bar{f}_1(\varphi) f_2(\varphi)\, d\varphi,$$

а генераторы записываются в виде $\hat{\Phi}_+ = e^{i\varphi}$, $\hat{\Phi}_- = e^{-i\varphi}$, $\hat{L}_z = -i\partial/\partial\varphi$. Разложение функций $f(\varphi)$ по базису $|m> = e^{im\varphi}/\sqrt{2\pi}$, $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ неприводимого представления алгебры (1), т.е. по собственным функциям оператора $\hat{L}_z$ – это разложение в ряд Фурье:

$$|f> = \sum_m c_m|m>, \; c_m = <m|f> = (2\pi)^{-1/2} \int_0^{2\pi} f(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi.$$

Поэтому будем называть (1) алгеброй Фурье, а соответствующую разрешимую группу Ли – группой Фурье.

Наряду с состояниями $|m>$ с определенным угловым моментом можно рассматривать и ненормируемые состояния, собственные для операторов $\hat{\Phi}_{\pm}$ (состояния с определенным углом):

$$|\varphi_0> = \delta(\varphi - \varphi_0) = (2\pi)^{-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{im(\varphi - \varphi_0)},$$

$$\hat{\Phi}_+|\varphi_0> = (2\pi)^{-1} e^{i\varphi_0} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i(m+1)(\varphi - \varphi_0)} = e^{i\varphi_0}|\varphi_0>, \hat{\Phi}_+|\varphi_0> = e^{-i\varphi_0}|\varphi_0>.$$

Эти состояния (не определен угловой момент), как и состояния $|m>$ (не определен угол) весьма далеки от классических.

Перейдем к построению систем обобщенных когерентных состояний (ОКС) группы Фурье. Согласно /2/, система ОКС может быть получена посредством действия оператора конечных преобразований группы на некоторый элемент $|z_0>$ из пространства представления. В нашем случае оператор конечных преобразований имеет вид $\exp(i\alpha\hat{L}_z + \bar{z}\hat{\Phi}_+ + z\hat{\Phi}_-)$, где α – действительное число (ограничения на параметры при генераторах следуют из унитарности и соотношений эрмитовости (2)). Подгруппе, связанной с генератором $\hat{L}_z$, отвечают повороты на угол α: $\exp(i\alpha\hat{L}_z) f(\varphi) = f(\varphi + \alpha)$.

Для построения ОКС, связанных с состояниями $|z_0> = |m>$, заметим, что $\exp(i\alpha\hat{L}_z)|m> = e^{im\alpha}|m>$, т.е. операторы вида $\exp(i\alpha\hat{L}_z)$ образуют стационарную подгруппу состояния $|m>$ (под действием $\exp(i\alpha\hat{L}_z)$ изменяется только его фаза). Поэтому для получения системы ОКС достаточно рассмотреть действие на $|m>$ оператора $\exp(\bar{z}\hat{\Phi}_+ + z\hat{\Phi}_-) = \exp(2\rho\cos(\varphi - \beta))$, $z = \rho e^{i\beta}$.

Таким образом, нормированные ОКС $|m, z>$ параметризуются комплексным числом z

$$|m, z> = [2\pi I_0(4\rho)]^{-1/2} \exp(2\rho\cos(\varphi - \beta) + im\varphi), \tag{4}$$

где $I_0(4\rho)$ – модифицированная функция Бесселя. Состояния $|m, z>$ являются собственными для оператора $\hat{L}_z - \bar{z}\hat{\Phi}_+ + z\hat{\Phi}_-$:

$$(\hat{L}_z - \bar{z}\hat{\Phi}_+ + z\hat{\Phi}_-)|m, z> = m|m, z>,$$

$$\hat{\Phi}_+|m, z> = |m+1, z>, \hat{\Phi}_-|m, z> = |m-1, z>.$$

Нетрудно получить коэффициенты разложения ОКС по дискретному базису:

$$<m'|m, z> = (-1)^{m-m'} I_{m-m'}(2\rho)/\sqrt{I_0(4\rho)}.$$

Зависимость модуля волновой функции ОКС (4) от φ представлена на рис. 1а. Средние и дисперсии в ОКС $|m, z>$ даются формулами

$$<\hat{L}_z> = m, <\hat{L}_z^2> = m^2 + 2\rho[I_1(4\rho) - \rho I_0(4\rho) + \rho I_2(4\rho)]/I_0(4\rho),$$

$$<\sin\varphi> = I_1(4\rho)\sin\beta/I_0(4\rho), <\cos\varphi> = I_1(4\rho)\cos\beta/I_0(4\rho), \tag{5}$$

$$<\sin^2\varphi> = 1/2(1 - I_2(4\rho)\cos 2\beta/I_0(4\rho)), <\cos^2\varphi> = 1/2(1 + I_2(4\rho)\cos 2\beta/I_0(4\rho)),$$

$$(\Delta\sin\varphi)^2 + (\Delta\cos\varphi)^2 = 1 - (I_1(4\rho)/I_0(4\rho))^2.$$

В пространстве средних (рис. 1б) ОКС $|m, z>$ при фиксированном m заполняют заштрихованные круги, точкам в центре которых отвечают состояния $|m>$.

При больших ρ, используя (5) и асимптотические формулы для модифицированных функций Бесселя /3/, получим:

$$(\Delta L_z)^2 \approx \rho, (\Delta\sin\varphi)^2 + (\Delta\cos\varphi)^2 \approx 1/4\rho,$$

то есть чем больше $\rho = |z|$, тем точнее определен угол и тем больше неопределенность углового момента.

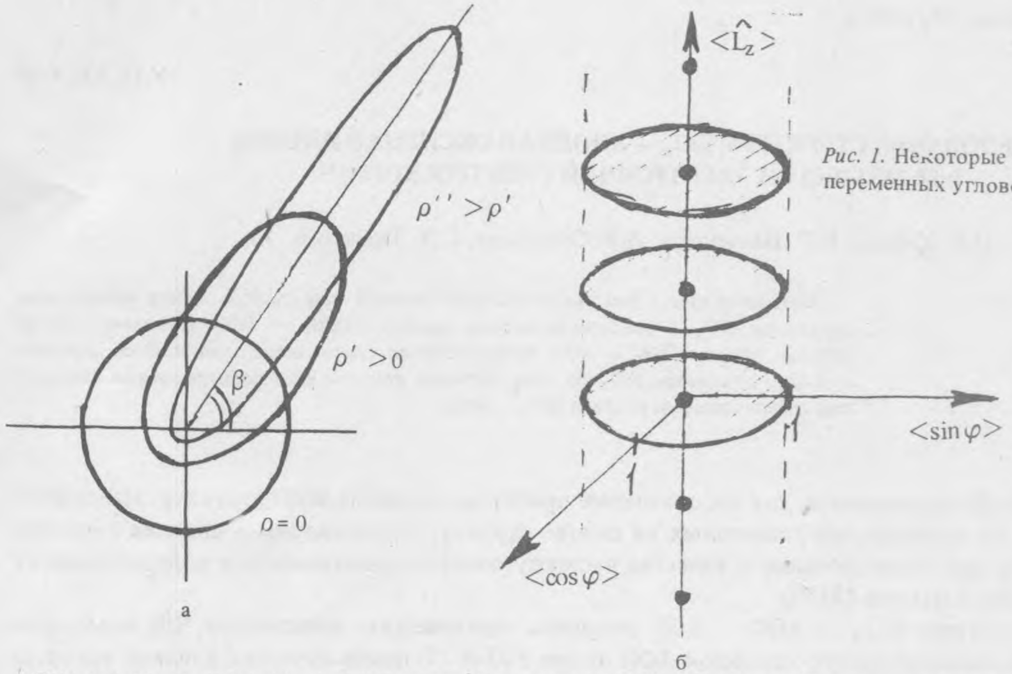

Рис. 1. Некоторые характеристики ОКС для переменных угловой момент – угол.

Обратимся к вопросу о существовании выделенной (наиболее близких к классическим состояниям) системы ОКС. Имеется несколько критериев для нахождения такой системы в наборе ОКС группы. Далее мы покажем, что в случае переменных угловой момент – угол ни одна из систем ОКС не удовлетворяет этим критериям.

Если неприводимое представление группы имеет старший вес, то система ОКС, наиболее близких к классическим, может быть получена действием конечных преобразований группы именно на этот старший вес (например, на $|0\rangle$ для группы Гейзенберга – Вейля, $|jj\rangle$ или $|j\text{-}j\rangle$ для представления $D(j)$ группы $SU(2)$). Однако в нашем случае старший вес отсутствует. Отсутствуют и состояния с максимальной стационарной подалгеброй, а именно эти состояния /2/ входят в системы ОКС наиболее близких к классическим.

В случае полупростых /4, 5/ и некоторых других групп (в частности, группы Гейзенберга – Вейля) искомая система ОКС может быть также определена как совокупность состояний с минимальной инвариантной дисперсией $(\Delta T)^2 = \sum c_i (\Delta T_i)^2$, где $\hat{T}_i = \pm T_i^+$ – генераторы, c_i – численные коэффициенты. Однако для алгебры (1) построить инвариантную относительно конечных преобразований группы дисперсию не представляется возможным (при $|z| \to \infty$ имеем: $\Delta L_z \to \infty$, $\Delta \sin\varphi \to 0$, $\Delta \cos\varphi \to 0$).

Несмотря на отсутствие выделенной системы ОКС, состояния $|m, z\rangle$ приближаются к классическим при больших m и $|z|$, $m \gtrsim |z|$. В этом случае имеем:

$$\langle \hat{L}_z \rangle = m, \ \Delta L_z \approx \sqrt{|z|}, \text{ т.е. } \Delta L_z \ll \langle \hat{L}_z \rangle,$$
$$(\Delta \sin\varphi)^2 + (\Delta \cos\varphi)^2 \approx 1/4|z| \xrightarrow[|z| \to \infty]{} 0.$$

Таким образом, при $m \geqslant |z| \to \infty$ ОКС $|m, z\rangle$ переходят в классические с угловым моментом m и углом $\beta = \arg z$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каррузерс П., Ньето М. В сб. Когерентные состояния в квантовой теории. М., Мир, 1972, с. 71.
2. Переломов А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М., Наука, 1987.
3. Ватсон Ч. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.
4. Delbourgo R. J. Phys. A., **10**, 1837 (1977).
5. Delbourgo R., Fox J. J. Phys. A., **10**, L233 (1977).

Поступила в редакцию 13 октября 1989 г.