Краткие сообщения по физике № 1·1990 г.

УДК 530.145

НЕПОПЕРЕЧНОСТЬ ПОЛЯРИЗАЦИОННОГО ТЕНЗОРА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ЯНГА – МИЛЛСА С ХИМИЧЕСКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

О. К. Калашников, Л. В. Разумов

Показано, что при ненулевых плотностях внешнего неабелевого заряда введение химических потенциалов в статистическую теорию полей Янга – Миллса нарушает поперечность поляризационного тензора глюонов и видоизменяет ряд тождеств Славнова – Тейлора. Обсуждается модельная независимость полученных результатов и их следствия.

Статистическое рассмотрение неабелевых калибровочных теорий в случае конечных температур и ненулевых химических потенциалов является актуальной физической задачей, имеющей не только большой теоретический интерес, но и целый ряд важных практических приложений. Калибровочные свойства статистической теории с $\mu_a \neq 0$ имеют свои особенности /1, 2/ и во многих случаях отличаются от свойств ее квантовополевого аналога, причем такое отличие наступает, если химические потенциалы введены как сопряженные величины к неабелевым зарядам. В частности, при $\mu_a \neq 0$ существенно изменяются в статистических теориях свойства поляризационного тензора калибровочных полей. Цель данной работы – изучить эти изменения и получить новые тождества Славнова – Тейлора, которым поляризационный тензор с $\mu_a \neq 0$ обязан точно удовлетворять. Вычисления выполнены нами для SU(2)-модели калибровочных полей Янга – Миллса, однако такой выбор модели не ограничивает общности полученных результатов, многие из которых являются модельно независимыми и легко обобщаются на случай других калибровочных групп.

Квантовое действие для теории с $\mu_a \neq 0$ эквивалентно действию квантовополевой теории в фоновой калибровке с полем $\bar{A}^a_\mu = i\mu^a u_\mu/g$ и имеет стандартный вид /3/

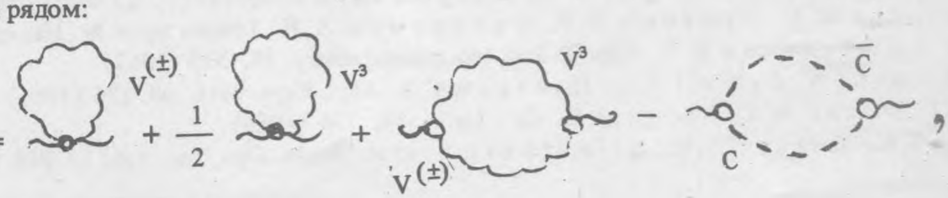
$$S = -\frac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^a_{\mu\nu} - \frac{1}{2a} [\, F^a(x \mid V)\,]^2 - \bar{C}^a(y)\, \nabla^{ab}_\mu(y) \frac{\delta F^d(x|V)}{\delta V^b_\mu(y)} C^d(x), \tag{1}$$

где $G^a_{\mu\nu}$ и $\nabla^{ab}_\mu(x)$ – тензор напряженности и ковариантная производная для суммарного (квантового и классического) поля $W^a_\mu = (V^a_\mu + A^a_\mu)$; $F^a(x|V)$ – калибровочная функция

$$F^a(x \mid V) = -(\delta^{ad}\partial_\mu + g f^{abd} \bar{A}^b_\mu)\, V^d_\mu(x). \tag{2}$$

В терминах заряженных полей химический потенциал μ участвует в исходной формулировке теории (1) лишь через удлинение производных (импульсов) $\partial^{\pm}_\alpha = \partial_\alpha \pm \mu u_\alpha$ ($p^{\pm}_\alpha = p_\alpha \pm i\mu u_\alpha$), а в остальном функциональный вид затравочных вершин и пропагаторов модели не отличается от случая $\mu \equiv 0$. Здесь $\mu_a = \mu\delta_{a3}$ и $u_\mu = (0,1)$.

Нами изучаются два поляризационных тензора: тензор $\Pi^{\parallel}_{\mu\nu}(\vec{p}, \hat{p}_4)$, определяющий функцию Грина полей V^3_μ, и тензор $\Pi^{\perp}_{\mu\nu}(\vec{p}, p_4)$ – для полей $V^{\pm}_\mu$, который в однопетлевом приближении представим следующим диаграммным рядом:

$-\Pi^{\perp} =$  (3)

причем в (3) все линии и вершины являются затравочными функциями Грина с $\mu \neq 0$. В фоновой калибровке с $\bar{A}^a_\mu = i\mu u_\mu \delta^{a3}/g$ аналитическое выражение, соответствующее (3), получается из выражений работы /4/ заменой всех импульсов на удлиненные и выделением в случае $\Pi^{\perp}_{\mu\nu}(\vec{p}, \hat{p}_4)$ отдельно вклада первых двух диаграмм

$$-\Pi^{\perp}_{\mu\nu}(\vec{p}, \hat{p}_4) = \frac{1}{\beta}\sum_{k_4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left\{\frac{g^2}{k^2(\hat{k}-\hat{p})^2}[\delta_{\mu\nu}(2\hat{k}^2 + 5\hat{p}^2 - 2\hat{k}\hat{p}) + 8\hat{k}_\mu\hat{k}_\nu - 2\hat{p}_\mu\hat{p}_\nu - 4(\hat{k}_\mu\hat{p}_\nu + \hat{k}_\nu\hat{p}_\mu)] - 3g^2\delta_{\mu\nu}\left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(\hat{k}-\hat{p})^2}\right]\right\} \qquad (4)$$

В (4) мы ограничились случаем $a = 1$, а все импульсы выразили через $\hat{p}_a = \bar{p}_a = p_a - i\mu u_a$.

Непосредственные вычисления выражения $\Pi^{\perp}_{\mu\nu}(\vec{p}, \hat{p}_4)$ из (4) и $\Pi^{\parallel}_{\mu\nu}(\vec{p}, p_4)$ нами опущены, так как они полностью следовали стандартным правилам квантовой статистики и легко воспроизводятся, если начинать с суммирования по $k_4 = 2\pi n/\beta$. Результат вычисления $\Pi^{\parallel}_{\mu\nu}(\vec{p}, p_4)$ не содержит новой информации по сравнению с /4/, однако это не так для тензора $\Pi^{\perp}_{\mu\nu}(\vec{p}, \hat{p}_4)$, который имеет более сложную (по сравнению со случаем $\mu = 0$) тензорную структуру

$$\Pi^{\perp}_{ij}(\vec{p}, \hat{p}_4) = \left[\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\vec{p}^{\,2}}\right] A^{\perp}(\vec{p}, \hat{p}_4) + \frac{p_i p_j \hat{p}_4^2}{\vec{p}^{\,2}\vec{p}^{\,2}}\left[\Pi^{\perp}_{44}(\vec{p}, \hat{p}_4) - 2ig^2\rho/\hat{p}_4\right],$$
$$\Pi^{\perp}_{i4}(\vec{p}, \hat{p}_4) = -\frac{p_i \hat{p}_4}{\vec{p}^{\,2}}\left[\Pi^{\perp}_{44}(\vec{p}, \hat{p}_4) - 2ig^2\rho/\hat{p}_4\right]. \qquad (5)$$

Явные выражения для функций $\Pi^{\perp}_{44}(\vec{p}, \hat{p}_4)$ и $A^{\perp}(\vec{p}, \hat{p}_4)$, определяющих (5), также претерпели изменения:

$$\Pi^{\perp}_{44}(\vec{p}, \hat{p}_4) = \frac{g^2}{\pi^2}\int_0^\infty kdk\left(\frac{n^+ + n^-}{2} + n\right) + \frac{g^2}{8\pi^2|\vec{p}|}\int_0^\infty dk\,[(\hat{p}_4^2 + 2\vec{p}^{\,2} - 4k^2)\times$$
$$\times[n^+\ln a^- + n^-\ln a^+ + n\ln(a^- a^+)] - 4ik\hat{p}_4[n^+\ln a^- - n^-\ln a^+ + n\ln(a^-/a^+)]], \qquad (6)$$
$$-A^{\perp}(\vec{p}, \hat{p}_4) = \frac{g^2}{2\pi^2}\int_0^\infty kdk\left[\left(\frac{\hat{p}_4^2}{\vec{p}^{\,2}} - 1\right)\left(\frac{n^+ + n^-}{2} + n\right) - ik\hat{p}_4(n^+ - n^-)/\vec{p}^{\,2}\right] -$$
$$-\frac{g^2(\vec{p}^{\,2} + \hat{p}_4^2)}{16\pi^2\vec{p}^{\,3}}\int_0^\infty dk\left\{(3\vec{p}^{\,2} - \hat{p}_4^2 + 4k^2)[n^+\ln a^- + n^-\ln a^+ + n\ln(a^- a^+)] + 4ik\hat{p}_4[n^+\ln a^- -\right.$$
$$\left.- n^-\ln a^+ + n\ln(a^-/a^+)]\right\}.$$

Обозначения, введенные в формулах (5) и (6), имеют простой вид

$$a^{\pm} = \frac{(\vec{p}^{\,2} + \hat{p}_4^2 - 2k|\vec{p}|) \pm 2ik\hat{p}_4}{(\vec{p}^{\,2} + \hat{p}_4^2 + 2k|\vec{p}|) \pm 2ik\hat{p}_4}, \quad n^{\pm} = \left\{\exp[\beta(k \pm \mu)] - 1\right\}^{-1}, \quad n = [\exp(\beta k) - 1]^{-1} \qquad (7)$$

и переходят в стандартные, когда $\mu = 0$. В (5) $\rho = \int d^3k(n^+ - n^-)/(2\pi)^3$.

Результат вычислений, представленный формулами (5) – (7), указывает, что в рамках SU(2)-модели при $\mu \neq 0$ поперечность поляризационного тензора $\Pi^{\perp}_{\mu\nu}(\vec{p}, \hat{p}_4)$ нарушена:

$$\hat{p}_\mu \Pi^{\perp}_{\mu\nu}(\vec{p}, \hat{p}_4) = 2ig^2 \rho u_\nu, \tag{8}$$

но такое утверждение не распространяется на поляризационный тензор $\Pi^{\parallel}_{\mu\nu}(\vec{p}, p_4)$, который соответствует полю V^3_μ, чей генератор определяет оператор заряда, сопряженного μ.

Выражение (8) является одним из следствий тождеств Славнова – Тейлора, видоизмененным за счет $\mu \neq 0$, и этот результат можно получить независимо с помощью обычных преобразований БРСТ /5/

$$\delta V^a_\mu(x) = \nabla^{ad}_\mu(x) C^d(x)\epsilon,\ \ \delta \bar{C}^a(x) = \alpha^{-1} F^a(x|V)\epsilon,\ \ \delta C^a(x) = (g/2) f^{abd} C^b(x) C^d(x)\epsilon. \tag{9}$$

осуществляемых для стандартного производящего функционала, построенного с помощью (1) и (2), и с учетом соответствующих статистике граничных условий. Найденное после преобразования (9) тождество

$$\begin{aligned} &\langle \nabla^{nd}_\nu(z) C^d(z) \bar{C}^m(y)\rangle - \alpha^{-1} \langle F^m(y|V) V^n_\nu(z)\rangle + \int d^4x \Big\{ J^a_\mu(x) \times \langle \nabla^{ad}_\mu(x) C^d(x) \bar{C}^m(y) V^n_\nu(z)\rangle - \\ &- \alpha^{-1} \theta^a(x) \langle F^a(x|V) \bar{C}^m(y) V^n_\nu(z)\rangle + (g/2) f^{abd} \bar{\theta}^a(x) \langle C^b(x) C^d(x) \bar{C}^m(y) V^n_\nu(z)\rangle \Big\} = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

дополненное еще одним тождеством, получающимся из инвариантности производящего функционала относительно замены $\bar{C}^a \to \bar{C}^a + \bar{\epsilon}^a$

$$\int d^4x \left\langle \frac{\delta F^a(z|V)}{\delta V^b_\mu(x)} \nabla^{bd}_\mu(x) C^d(x) \bar{C}^m(y) \right\rangle = \delta^{am} \delta^4(z - y), \tag{11}$$

образуют полную систему обобщенных тождеств Славнова – Тейлора в статистической теории полей Янга – Миллса во внешнем поле. В нашем случае $J^1_\mu = J^2_\mu = 0$ и можно считать, что $\bar{\theta}^a = \theta^a = 0$ также. После перехода к заряженным полям находим из (10) и (11) условие на продольную часть полного пропагатора

$$\begin{aligned} &\alpha^{-1} \langle \partial^+_\nu(x) V^+_\nu(x) \partial^-_\mu(y) V^-_\mu(y) \rangle = \delta^4(x - y) - \int d^4u J^3_\mu(u) \times \\ &\times \langle \partial^+_\nu(x) V^+_\nu(x) [\partial_\mu C^3(u) + ig(V^-_\mu(u) C^+(u) - V^+_\mu(u) C^-(u))] \bar{C}^+(y)\rangle, \end{aligned} \tag{12}$$

которое является одним из существенных для SU(2)-теории тождеств Славнова – Тейлора. В однопетлевом приближении при $\alpha = 1$ тождество (12) упрощается к виду $\hat{p}_\mu \Pi^{\parallel}_{\mu\nu}(\vec{p}, \hat{p}_4) = -gJ^3_\nu$, а после использования связи источника и химического потенциала $J^3_\nu = -2ig\rho u_\nu$ в точности совпадает с выражением (8). Непосредственной причиной потери поперечности, как это видно из (8), является ненулевая плотность внешнего заряда ρ, которую для статистической теории с химическим потенциалом не всегда можно приравнять нулю.

Итак, в работе показано, что введение химического потенциала в статистическую теорию полей Янга – Миллса при $\rho \neq 0$ приводит к потере поперечности поляризационного тензора тех полей, которые неинвариантны относительно действия остаточной группы глобальной симметрии (в нашем случае это поля $V^{\pm}$), в то время как тензоры поляризации инвариантных относительно этой группы полей остаются поперечными (поле V^3). В более сложных случаях, когда в теорию введены несколько химических потенциалов и связь между ними и внешними зарядами допускает ряд различных возможностей, важно помнить, что поляризационные тензоры не всегда теряют свою поперечность, а существует возможность ее сохранить, если плотности всех неабелевых зарядов будут выбраны нулевыми, даже при всех $\mu_a \neq 0$. Полученные результаты (в представленной выше формулировке) модельно независимы, а выбранная нами SU(2)-модель только упрощает проведенные вычисления и не несет принципиальной смысловой нагрузки.

Авторы глубоко признательны Фрадкину Е. С. за постоянное внимание к работе и И. А. Баталину за плодотворное обсуждение ряда принципиальных вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Калашников О. К., Разумов Л. В. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 8, 20 (1989); ЯФ, **50**, 884 (1989).
2. Kalashnikov O. K., Razumov L. V., Perez Rojas H. Minnesota Prepr. TPI-MINN-89/28-T.
3. Fradkin E. S., Tyutin I. V. Riv. Nuovo Cim. **4**, 1 (1974).
4. Kalashnikov O. K. Fortschr. Phys., **32**, 525 (1984).
5. Becchi C., Rouet A., Stora R. Com. Math. Phys, **42**, 127 (1975). Тютин И. В. Препринт ФИАН № 39, М., 1975.

Поступила в редакцию 4 ноября 1989 г.