Краткие сообщения по физике № 2-1990 г.

УДК 530.145

О ПРИВОДИМОСТИ КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫХ УРАВНЕНИЙ К ШРЕДИНГЕРОВСКОМУ ВИДУ

А. Г. Ушверидзе

Обнаружен простой способ приведения гамильтонианов квантовых волчков на простых и полупростых алгебрах Ли к шредингеровскому виду. Возникающие в результате многомерные квазиточнорешаемые уравнения Шредингера формулируются на кривых многообразиях. Количество таких уравнений для заданного квантового волчка равно размерности подгруппы Вейля соответствующей алгебры Ли.

Пусть x^α – образующие простой или полупростой алгебры X размерности d и ранга r, удовлетворяющие коммутационным соотношениям $[x^\alpha, x^\beta] = C^{\alpha\beta}_{\ \ \gamma} x^\gamma$. Дифференциальные реализации этих образующих, действующие в пространстве полиномов от $n \leqslant (d - r) / 2$ переменных, имеют вид

$$x^\alpha = f_i^\alpha \partial_i + g^\alpha, \tag{1}$$

где $f_i^{\ \alpha}$ и g^α – функции, удовлетворяющие соотношениям:

$$f_i^{\ \alpha}\partial_i f_k^\beta - f_i^{\ \beta}\partial_i f_k^\alpha = C^{\alpha\beta}_\gamma f_k^{\ \gamma}, \tag{2}$$

$$f_i^{\ \alpha}\partial_i g^\beta - f_i^{\ \beta}\partial_i g^\alpha = C^{\alpha\beta}_\gamma g^\gamma. \tag{3}$$

Действуя на (2) оператором ∂_k, получим.

$$f_i^{\ \alpha}\partial_i(\partial_k f_k^\beta) - f_i^\beta \partial_i(\partial_k f_k^\beta) = C^{\alpha\beta}_\gamma(\partial_k f_k^\beta). \tag{4}$$

Сравнивая (4) с (3) видим, что условия (3) сохраняют свой вид при замене $g^\alpha \to g^\alpha - \frac{1}{2}\partial_k f_k^{\ \alpha}$. Поэтому, если операторы (1) реализуют представление алгебры X, то операторы

$$z^\alpha = f_i^{\ \alpha}\partial_i + g^\alpha - (1/2)\ \partial_k f_k^\alpha \tag{5}$$

также реализуют некое ее представление. Можно утверждать, что если (1) реализует конечномерное представление, то представление, реализуемое (5), также будет конечномерным.

Рассмотрим гамильтониан квантового волчка во внешнем магнитном поле /1/ $h = a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + a_\alpha x^\alpha$, в котором $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$ и a_α – произвольные вещественные числа. Пользуясь формулой (1), h можно представить в виде дифференциального оператора второго порядка:

$$h = P_{ik}\partial_i\partial_k + Q_i\partial_i + R, \tag{6}$$

в котором

$$P_{ik} = a_{\alpha\beta} f_i^{\ \alpha} f_k^\beta,$$

$$Q_i = a_{\alpha\beta}\,[f_k^{\ \alpha}(\partial_k f_i^{\ \beta}) + 2f_i^{\ \alpha} g^\beta] + a_\alpha f_i^{\ \alpha}. \tag{7}$$

$$R = a_{\alpha\beta}[f_k^{\ \alpha}(\partial_k g^\beta) + g^\alpha g^\beta] + a_\alpha g^\alpha$$

Если представление (1) конечномерно, то оператор (6) будет, согласно /1/, оператором квазиточнорешаемого спектрального дифференциального уравнения. Чтобы привести этот оператор к шредингеровскому виду на многообразии с метрикой P^1_{ik} должна существовать функция U, удовлетворяющая условию /1, 2/:

$$2P_{ik}\partial_k \ln U - \partial_k P_{ik} + Q_i = 0. \tag{8}$$

Соответствующий гамильтониан H связан с оператором h преобразованием $H = -ShS^{-1}$, где $S = \sqrt[4]{P}/U$, $P \equiv$ $\equiv \det P_{ik}$. Явный вид его: $H = -\sqrt{P}\,\partial_i (P_{ik}/\sqrt{P}) + V$, где $V = -P_{ik}D_iD_k - Q_iD_i - R$, $D_i = \partial_i + \partial_i \ln U - (1/4)\partial_i \ln P$.

Для ответа на вопрос, при каких ограничениях на $a_{\alpha\beta}$ и a_α функция U существует /1/, подставим (7) в (8) В результате (8) примет вид:

$$f_k\,(a_{\alpha\beta}z^\beta - a_\alpha)\,U = 0. \tag{9}$$

Очевидно, что для выполнимости (9) достаточно, чтобы

$$(a_{\alpha\beta}z^\beta - a_\alpha)\,U = 0. \tag{10}$$

Выберем в X базис Картана – Вейля. Элементы этого базиса будем нумеровать группами индексов $\beta =$ $= \left\{\beta_-, \beta_0, \beta_+\right\}$. Тогда (10) можно переписать в виде:

$$(a_{\alpha\beta_+} z^{\beta_+} + a_{\alpha\beta_0} z^{\beta_0} + a_{\alpha\beta_-} z^{\beta_-} - a_\alpha)\,U = 0. \tag{11}$$

Из (11) очевидно, что положив $a_{\alpha\beta_+} = 0$ и считая $a_{\alpha\beta_0}$ и $a_{\alpha\beta_-}$ $(\alpha = \alpha_0, \alpha_-)$ произвольными, мы можем удовлетворить (11), взяв в качестве U младший вектор представления (5).

Для этого параметры a_α должны удовлетворять равенству $a_\alpha = a_{\alpha\beta_0} m^{\beta_0}$, где m^{β_0}– собственные значения операторов z^{β_0} на U, т.е., фактически, сигнатура представления (5). Очевидно, что число различных способов выбора базиса Картана – Вейля, т.е. число различных решений этой задачи равно размерности подгруппы Вейля алгебры X.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shifman M. A. Preprint CERN, **CH – 1211** (1988).
2. Ушверидзе А. Г. Физика ЭЧАЯ, **20**, вып. 5, 1185 (1989).

Поступила в редакцию 4 декабря 1989 г.