Краткие сообщения по физике № 3-1990 г.

УДК 530.145

ОБОБЩЕННЫЕ МОДЕЛИ ГОДЕНА И ИХ РЕШЕНИЯ

А.Г. Ушверидзе

Дано определение обобщенных моделей Годена на алгебрах A_r, B_r, C_r и D_r. Приведено точное решение этих моделей в рамках алгебраического анзатца Бете.

Пусть X_r – простая классическая алгебра Ли ранга r, т.е. одна из алгебр A_r, B_r, C_r, D_r. Для любой такой алгебры справедливо разложение

$$X_r = (\mathcal{E}_r^- \oplus H_r \oplus \mathcal{E}_r^+) \oplus X_{r-1}, \tag{1}$$

где $\mathcal{E}_r^\pm$ – коммутативные подалгебры, сопряженные относительно формы Киллинга – Картана; H_r – одномерная самосопряженная подалгебра подалгебры Картана; X_{r-1} – простая классическая алгебра Ли ранга r–1, необязательно из той же серии (табл. 1). Используя разложение (1) многократно, можно построить цепочку вложенных подалгебр X_s, $s = 1, ..., r$, а также последовательности алгебр $\mathcal{E}_s^\pm$ и H_s, $s = 1,..., r$. Обозначим элементы алгебры X_s через $X_{s,i}$; через $C_{s,\, ik,\, l}$, $g_{s,\, ik}$ и $g^{-1}_{s,\, ik}$ обозначим структурные константы, прямой и обратный метрический тензоры алгебры X_s. Для элементов алгебр $\mathcal{E}_s^\pm$ и H_s используем обозначения $\vec{e}_s^{\,\pm}$ и h_s. Эти элементы нормируем согласно условиям $(\vec{e}_s^{\,+}, \vec{e}_s^{\,-})_s = 1$, $(h_s, h_s)_s = 1$, где $(..., ...)_s$ – билинейная форма Киллинга – Картана алгебры X_s. Очевидно, что совокупность элементов $\vec{e}_s^{\,\pm}$, h_s, $s = 1, ..., r$ образует базис в X_r, который назовем натуральным.

Таблица 1

Некоторые свойства разложения (1)

X_r, dim X_r	A_r, $r(r + 2)$	B_r, $r(2r + 1)$	C_r, $r(2r + 1)$	D_r, $r(2r - 1)$
X_{r-1}, dim X_{r-1}	A_{r-1}, $r^2 - 1$	B_{r-1}, $(r-1)(2r-1)$	A_{r-1}, $r^2 - 1$	A_{r-1}, $r^2 - 1$
dim $\mathcal{E}_r^\pm$	r	$2r - 1$	$r(r + 1)/2$	$r(r - 1)/2$

Справедливы коммутационные соотношения:

$$[e_s^\pm, x_{s-1,\, i}] = D^\pm_{s-1,i}\, e^\pm_{s\, s}, \quad [h_s, e_s^\pm] = \pm a_s e_s^\pm,$$

$$e_s^\pm \cdot e_s^+ - e_s^+ \cdot e_s^\pm = \pm b_s h_s, \tag{2}$$

$$e_s^\pm \oplus e_s^\mp - e_s^\mp \oplus e_s^\pm = a_s h_s \hat{I}_s - c_s g^{-1}_{s-1,\, ik}\, x_{s-1,\, i}\, \hat{D}^\pm_{s-1,\, k}$$

для всех $s = 1, ..., r$. Остальные коммутаторы в алгебре X_r равны нулю. Здесь $\hat{D}^\pm_{s-1}$ – матрицы, реализующие представление $T^\pm_{s-1}$ алгебры X_{s-1} размерности dim $\mathcal{E}_s^\pm$, а a_s, b_s, c_s – числа, определяемые формулами $a_s = (2 \dim \mathcal{E}_s^\pm)^{-1/2}$, $b_s = (\dim \mathcal{E}_s^\pm/2)^{1/2}$, $c_s = 1 - (\dim \mathcal{E}_s^\pm - 1)/\dim X_{s-1}$. Представления T_r алгебры X_r можно определить с помощью равенств: $\vec{e}_s^{\,+}|0\rangle = 0$, $h_s|0\rangle = \eta_s(T_r)|0\rangle$, $s = 1, ..., r$, где $|0\rangle$ – старший вектор представления. Набор чисел $F_s = \eta_s(T_r)$, $s = 1, ..., r$ назовем сигнатурой представления T_r. Сигнатуры представлений $T_s^{\pm}$ алгебр X_s, реализуемых матрицами $\hat{D}_{s,k}^{\pm}$, обозначим через $\eta_q(T_s^{\pm})$, $q = 1, ..., s$.

Поставим в соответствие конечномерной алгебре X_r бесконечномерную алгебру Годена $G(X_r)$, образующие которой $x_{r,i}(\lambda)$ являются операторнозначными функциями параметра λ и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$[x_{r,i}(\lambda), x_{r,k}(\mu)] = C_{r,ik,l}\ [x_{r,l}(\lambda) - x_{r,l}(\mu)]/(\lambda - \mu). \tag{3}$$

Коммутационные соотношения для образующих $\vec{e}_s^{\pm}(\lambda)$ и $h_s^{\pm}(\lambda)$ находятся из (2), (3). Определим представление $G(T_r)$ алгебры Годена $G(X_r)$ с помощью равенств:

$$\vec{e}^{+}_s(\lambda)|0\rangle = 0,\ h_s(\lambda)|0\rangle = \eta_s(\lambda, G(T_r))|0\rangle,\ s = 1, ..., r,$$

где $|0\rangle$ – старший вектор представления. Набор функций $F_s(\lambda) = \eta_s(\lambda, G(T_r))$, $s = 1, ..., r$ назовем сигнатурой представления $G(T_r)$.

Согласно /1/, операторы $K_r(\lambda) = g^{-1}_{r,ik} x_{r,i}(\lambda) x_{r,k}(\lambda)$ образуют коммутативное семейство, поэтому $K_r(\lambda)$ можно рассматривать как производящую функцию коммутирующих интегралов движения некоторой вполне интегрируемой системы, полностью характеризуемой набором r функций $F_1(\lambda), ..., F_r(\lambda)$. Такую систему назовем обобщенной моделью Годена, а спектральную задачу $K_r(\lambda)f = \Lambda_r(\lambda)f$, $f \in W[G(T_r)]$ в пространстве $W[G(T_r)]$ представления $G(T_r)$ – обобщенной задачей Годена.

Обобщенная задача Годена допускает точное решение в рамках алгебраического анзатца Бете. Бетевская волновая функция имеет вид:

$$f = [\mathop{\oplus}_{i=1}^{M_r} \vec{e}_r^{\,-}(\xi_{r,i})] \oplus [\mathop{\oplus}_{i=1}^{M_{r-1}} \vec{e}_{r-1}^{\,-}(\xi_{r-1,i})] \oplus ... \oplus [\mathop{\oplus}_{i=1}^{M_1} \vec{e}_1^{\,-}(\xi_{1,i})]\, f_0,$$

где f_0 – тензор с $M_1 + ..., + M_r$ индексами, свернутый по всем индексам с компонентами векторов $\vec{e}_s$, $s = 1, ..., r$. Явный вид этого тензора не выписываем. Спектр собственных значений определяется формулой

$$\Lambda_r(\lambda) = d_r \sum_{s=1}^{r} g_s\, [F_s^2(\lambda) + b_s F_s'(\lambda) + 2 \sum_{p=1}^{r}\sum_{m=1}^{M_p} a_{sp} \frac{F_s(\lambda) - F_s(\xi_{p,m})}{\lambda - \xi_{p,m}}].$$

Числа $\xi_{p,m}$, $m = 1, ..., M_p$, $p = 1, ..., r$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{p=1}^{r}\sum_{m=1}^{M_p} \omega_{sp}/(\xi_{s,n} - \xi_{p,m}) + \Phi_s(\xi_{s,n}) = 0,$$

где $n = 1, ..., M_s$; $s = 1, ..., r$, $\omega_{s_1 s_2} = \sum_{q=1}^{r} g_q a_{q s_1} a_{q s_2}$, $\Phi_s(\lambda) = \sum_{q=1}^{r} g_q a_{qs} F_q(\lambda)$; $a_{sp} = -\eta_s(T^{+}_{p-1})$, если $p > s$; $a_{sp} = a_s$, если $p = s$; $a_{sp} = 0$, если $p < s$; d_r и g_s – числа, входящие в разложение $\prod_{n=s+1}^{r} c_n = d_r g_s$.

В заключение заметим, что если $F_1(\lambda), ..., F_r(\lambda)$ – рациональные функции, то обобщенная модель Годена сводится к модели магнетика на алгебре $X_r \oplus ... \oplus X_r$ или ее контракциях. В частности, если функции $F_1(\lambda), ..., F_r(\lambda)$ – невырожденны и имеют вид $F_s(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N} b_{s,\alpha}/(\lambda - a_\alpha)$, то обобщенная модель Годена превращается в обычную модель Годена на алгебре $X_r \oplus ... \oplus X_r$ (N раз), решения которой найдены в /2/. Расширенный вариант настоящей работы опубликован в виде препринта /3/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годен М. Волновая функция Бете. М., Мир, 1987.
2. Jurko V.E. J. Math. Phys., **30**, 1289 (1989).
3. Ушверидзе А.Г. Препринт ИФАН ГССР ФТТ-16, Тбилиси, 1989.

Поступила в редакцию 4 января 1990 г.