Краткие сообщения по физике № 5-1990 г.

УДК 530.145+534.2

СТРУКТУРА НЕЛОКАЛЬНЫХ ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

М.А. Соловьев

Показано, что разложение лоренц-ковариантных распределений Шварца по полиномиальным ковариантам допускает обобщение на нелокализуемые функционалы.

В релятивистской квантовой теории поля часто используется разложение лоренц-ковариантных выражений по полиномиальным ковариантам. В /1, 2/ это разложение доказано для распределений умеренного роста, определенных на пространстве Шварца S. Здесь оно обобщается на функционалы сколь угодно высокой сингулярности. Как показано в /3/, такое обобщение позволяет распространить теорему о связи спина со статистикой на нелокальные квантовые поля. Разумеется, достаточно рассмотреть неприводимые представления группы $SL(2, C)$, накрывающей группу $L_+^\uparrow$; мы будем использовать их обычную реализацию в пространствах комплексных однородных многочленов от переменных $\omega = (\omega^1, \omega^2)$, $\bar\omega = (\bar\omega^1, \bar\omega^2)$. (В статье речь идет о конечномерных представлениях.) Стандартный полиномиальный ковариант, преобразующийся по неприводимому представлению $D^{(l,\, l)}$, l – полуцелое число, имеет вид $(\bar\omega\tilde{x}\omega)^{2l}$ /2/, где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

В качестве пространств пробных функций возьмем пространства S^β Гельфанда – Шилова /4/. Входящие в S^β функции удовлетворяют неравенствам $|\partial^q\varphi(x)| \leqslant C_N B^{|q|} q^{\beta q}(1 + \|x\|)^{-N}$, где константы C_N, B зависят от φ. Топология пространств S^β определяется как индуктивная относительно счетно-нормированных пространств $S^{\beta,B} = \bigcap_{\delta \to 0,\, N \to \infty} S^{\beta,B+\delta,\, N}$, объединением которых по B = 1,2,... оно является. Чем меньше индекс β, тем выше сингулярность непрерывных по этой топологии линейных функционалов. Лишь при $\beta \geqslant 1$ корректно определены их носители, а при $\beta < 1$ функционалы становятся нелокализуемыми.

Теорема. Лоренц-ковариантная обобщенная функция F, заданная на пространстве $S^\beta(\mathbf{R}^4)$ и преобразующаяся по представлению $D^{(k,\, l)}$, отлична от нуля лишь при $k = l$ и в этом случае представима в виде

$$F(x, \omega, \bar\omega) = (\bar\omega\tilde{x}\omega)^{2l} f(x), \qquad (2)$$

где f также определена на $S^\beta(\mathbf{R}^4)$ и лоренц-инвариантна.

Размерность представления $D^{(l,\, l)}$ равна $(2l + 1)^2$. Обозначим через $S^{\beta\prime}$ сопряженное к S^β пространство, снабженное проективной топологией относительно сильных сопряженных к $S^{\beta,\, B}$. Пусть h' – отображение $S^{\beta\prime}$ в прямую сумму $(2l + 1)^2$ экземпляров этих пространств, сопоставляющее функционалу результат его умножения на коэффициенты многочлена $(\bar\omega\tilde{x}\omega)^{2l}$. Если отображение h' переводит каждое замкнутое подпространство в замкнутое, а множество ковариантных распределений Шварца плотно в интересующем нас множестве функционалов F, то сформулированная теорема немедленно следует из аналогичной теоремы /1, 2/ для распределений, поскольку подпространство инвариантных функционалов f замкнуто в $S^{\beta\prime}$.

Лемма 1. Лоренц-ковариантные распределения умеренного роста плотны в пространстве преобразующихся по тому же представлению лоренц-ковариантных обобщенных функций на $S^\beta(\mathbf{R}^4)$ при любом $\beta \geqslant 0$.

Доказательство. Оператор Фурье переводит $S^{\beta,B}$ в $S_{\beta,\, B}$ /4/. Регуляризуем F умножением $\widetilde{F}$ на функцию $\chi(\epsilon^2 p^2)$, где χ бесконечно дифференцируема, сосредоточена на сегменте $[-1, 1]$ и равна 1 в окрестности нуля. Используя формулу Лейбница и оценку $|\partial^q\chi(\epsilon^2 p^2)| \leqslant C_q\epsilon^2\, (1 + \|p\|)^{|q|}$ $(q \neq 0)$, нетрудно убедиться, что для любой функции $\psi \in S_{\beta,\,B}$ при $\epsilon \to 0$ имеет место предельное соотношение $\chi(\epsilon^2 p^2)\,\psi \to \psi$ по топологии $S_{\beta,\,B}$. Тем самым регуляризация F_ϵ слабо сходится к F, а поскольку пространства $S_{\beta,\,B}$ монтелевы (совершенны) /4/, $F_\epsilon \to F$ и в проективной топологии. Покажем, что F_ϵ допускает непрерывное продолжение на пространство Шварца S. Функционал $\widetilde{F}_\epsilon$ определен очевидно на тех элементах S, носители которых пересекаются с $\Omega_\epsilon = \{p : \epsilon^2 p^2 < 1\}$ по ограниченному множеству. Каждой функции $\psi \in S$ сопоставим $\hat{\psi} \in S$ с таким свойством носителя. А именно: отметим на поверхности $p^2 = 0$ счетное семейство точек p_i (i = 1,2,...) так, чтобы евклидовы шары $U_i = \{p : \|p_i - p\| < 1/2\}$ покрывали область Ω_ϵ, что заведомо можно при достаточно малых ϵ. Обозначим через $e_i(p)$ функцию, равную 1 в U_i и 0 вне шара радиуса 1; все эти функции можно получить сдвигами из $\chi(\|p\|^2)$. Пусть Λ_i — преобразование Лоренца в плоскости p^0, p_i, переводящее точку p_i на единичную сферу. Определим $\hat{\psi}$ формулами

$$\hat{\psi} = \sum_{i=1}^{\infty} \hat{\psi}_i, \quad \hat{\psi}_i(p) = e_i(\Lambda_i^{-1} p)\,\psi_i(\Lambda_i^{-1} p), \quad \psi_i = (1 - e_{i-1})\,\psi_{i-1}\ (i > 1), \quad \psi_1 = \psi \tag{3}$$

и проверим, что этот ряд сходится в S, т.е. по каждой норме $\|\cdot\|_N = \sup\{(1 + \|p\|)^N\,|\partial^q(\cdot)| : p \in \mathbf{R}^4, |q| \leqslant N\}$. Оценивая $\|\hat{\psi}_i\|_N$, предположим сначала, что $p_i^{0,1} > 0$, $p_i^{2,3} = 0$ и воспользуемся конусными координатами $p^{\pm} = (p^0 \pm p^1)/\sqrt{2}$, в которых преобразование Λ_i выглядит как $p^+ \to p^+/r$, $p^- \to rp^-$, где $r = \|p_i\| = p_i^+$. Считая $r > 1$, получаем

$$\|\hat{\psi}_i\|_N \leqslant \sup_{\substack{r-1 \leqslant \|p\| \leqslant r+1 \\ |q| \leqslant N}} (1 + r\|p\|)^N\,|r^q + \partial^q(e_i(p)\,\psi_i(p))| \leqslant C\,\|e_i\psi_i\|_{N'}(1 + r)^{3N - N'}.$$

Переход от соответствующих p_i конусных координат к исходным осуществляется некоторым поворотом R_i и не меняет характер оценки, поскольку $\|\varphi(Rp)\|_N \leqslant C_N\,\|\varphi(p)\|_N$, где C_N можно взять независящим от R ввиду компактности группы вращений. $\|e_i\psi_i\|_N \leqslant C'_N\,\|\psi\|_N$, где C'_N также не зависит от i, ибо мы вправе выбрать точки p_i так, чтобы каждый шар U_i пересекался не более чем с некоторым фиксированным числом других шаров $U_{i'}$. Для покрытия той части Ω_ϵ, которая заключена в слое $r - 1 \leqslant \|p\| \leqslant r + 1$, требуется $\sim r^2$ шаров. Взяв $N' = 3N + 4$, заключаем, что ряд (3) сходится в S, причем $\|\hat{\psi}\|_N \leqslant C\,\|\psi\|_{N'}$, т.е. отображение $\psi \to \hat{\psi}$ непрерывно. По построению имеем $\sum_1^k e_i\psi_i = \psi - \psi_{k+1}$. Для функций ψ с ограниченным носителем, которые плотны в S и в S_β, $\psi_k(p) = 0$ всюду в Ω_ϵ при достаточно больших k. Поэтому в случае инвариантных F функционал, сопоставляющий ψ число $(\widetilde{F}_\epsilon, \hat{\psi})$, служит непрерывным продолжением $\widetilde{F}_\epsilon$ на S. Если же F ковариантна и преобразуется по представлению T, то желаемое продолжение можно определить формулой

$$(\widetilde{F}^\nu_\epsilon, \psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{\mu} T^\nu_\mu(\Lambda_i^{-1})\,(\widetilde{F}^\mu, \chi(\epsilon^2 p^2)\,\hat{\psi}_i), \tag{4}$$

используя компонентную запись в некотором базисе. Для функционала $\widetilde{F}^\mu$ при любом B можно указать такое N, что норма $\|\widetilde{F}^\mu\|_{B,\,N}$ конечна, а носитель функции $\chi(\epsilon^2 p^2)\,\hat{\psi}_i$ при достаточно малых ϵ содержится в шаре $\|p\| < 2$, поэтому $\|\chi(\epsilon^2 p^2)\,\hat{\psi}_i\|_{B,\,N} \leqslant C\,\|\psi\|_{N'}(1 + r_i)^{3N - N'}$. Матричные элементы $T^\nu_\mu(\Lambda_i^{-1})$ ограничены по r_i полиномом, степень которого определяется представлением максимальной размерности, входящим в разложение T на неприводимые. Поскольку N' можно взять сколь угодно большим, заключаем, что числовая последовательность (4) сходится, определяя непрерывный функционал на S, совпадающий на S_β с $\widetilde{F}^\nu_\epsilon$ в силу прежних соображений.

Лемма 2. Любая функция $\varphi \in S^{\beta,\,B}(\mathbf{R}^n)$, $\beta < 1$, удовлетворяющая условию $\partial^q\varphi(0) = 0$ при всех $|q| \leqslant mn$, допускает разложение $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{m+1}\,\varphi_i(x)$, где $\varphi_i \in S^{\beta,\,B}(\mathbf{R}^n)$.

Доказательство. При $\beta < 1$ определение пространства $S^{\beta, B}$ можно переформулировать в терминах комплексных переменных /4/: каждый его элемент φ допускает аналитическое продолжение в C^n, которое удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(z)| \leqslant C_{N,\delta} (1 + \|x\|)^{-N} \exp\left\{ b \sum_{i=1}^{n} |(B+\delta) y_i|^{1/(1-\beta)} \right\}, \tag{5}$$

где константа b зависит лишь от β. После такой переформулировки справедливость леммы для $n = 1$ становится очевидной. Далее применим индукцию по n, вводя обозначение $\Delta(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi_0(x_n) \sum_{j=0}^{m} x_n^j \partial_n^j \varphi(x', 0)/j!$, где $x' = (x_1, ..., x_{n-1})$ и функция $\varphi_0 \in S^{\beta, B}(R^1)$ подчинена условиям $\varphi_0(0) = 1$, $\varphi_0^{(j)}(0) = 0$, $j = 1, ..., m$. Поскольку $m(n-1) \leqslant mn - j$, из справедливости леммы для размерности $n-1$ следует $\partial_n^j \varphi(x', 0) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i^{m+1} \varphi_{ij}(x')$, где $\varphi_{ij} \in S^{\beta, B}(R^{n-1})$. При всех $j \leqslant m$ соблюдается $\partial_n^j \Delta(z', z_n)|_{z_n = 0} = 0$, поэтому $\Delta(z', z_n) = z_n^{m+1} \varphi_n(z', z_n)$, где φ_n — целая функция. При $|z_n| \geqslant 1$ она очевидным образом удовлетворяет оценке (5), а при $|z_n| < 1$ эта оценка получается с помощью формулы Коши по последней переменной, где в качестве контура интегрирования следует взять окружность радиуса 2 с центром в точке z_n.

Следствие. Отображение h' имеет замкнутый образ. Действительно, поскольку $S^{\beta, B}$ — рефлексивное пространство Фреше, замкнутость $\mathrm{im}\, h'_B$ равносильна замкнутости образа сопряженного к h'_B отображения h_B (см. /5/, стр. 204). Полагая в формулировке леммы $2n = 4$, $m + 1 = 4l$ и выражая x_i^{4l} через элементы матрицы (1), мы видим, что $\mathrm{im}\, h_B$ содержит пересечение ядер непрерывных функционалов $\partial^q \delta(0)$, $|q| \leqslant 4(4l - 1)$. Это не дает точного описания подпространства $\mathrm{im}\, h_B$, но позволяет заключить, что оно замкнуто, как сумма конечномерного и замкнутого подпространств. Кроме того, $\ker h'_B = (\mathrm{im}\, h_B)^{\perp} \subset S^{\beta'}$. Значит, $\mathrm{im}\, h' = \bigcap_B \mathrm{im}\, h'_B$ и из замкнутости всех $\mathrm{im}\, h'_B$ следует замкнуть $\mathrm{im}\, h'$.

Теперь нетрудно завершить доказательство основного утверждения статьи. Согласно теореме об открытом отображении каждое h'_B является топологическим гомоморфизмом. Возможность применения этой теоремы гарантируется тем, что $\mathrm{im}\, h'_B$ — пространство DFS (как замкнутое подпространство пространства DFS). Отсюда следует, что и h' является открытым отображением на свой образ. Пусть L — замкнутое подпространство в S^{β}. Его сумма с конечномерным подпространством $\ker h'$ также замкнута, поэтому для любой точки вне суммы найдется окрестность V, которая с ней не пересекается. Множество $h'(V)$ является окрестностью в $\mathrm{im}\, h'$ и не пересекается с $h'(L)$, таким образом, $h'(L)$ замкнуто.

Изложенное здесь доказательство представления (2) применимо с очевидными изменениями и к функционалам на пространстве S^1, которое служит универсальным для локальной квантовой теории поля.

Автор благодарен В.Я. Файнбергу за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Oksak A. I., Todorov I. T. Commun. Math. Phys., **14**, 271 (1969).
2. Боголюбов Н. Н. и др. Общие принципы квантовой теории поля. М., Наука, 1987.
3. Соловьев М. А. Труды ФИАН, **209**, 113 (1990).
4. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции, вып. 2. М., Физматгиз, 1958.
5. Шефер X. Топологические векторные пространства. М., Мир, 1971.

Поступила в редакцию 21 февраля 1990 г.