

О РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЯХ ДЛЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНО ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

К.И. Воляк, А.Ю. Диналенко, А.И. Толстых, И.В. Шуган

Исследована задача о кинематике линейных волновых пакетов в медленно движущейся среде. Показана возможность нарушения гладкости получаемого методом характеристик решения и образования "ударных волн" модуляции частоты пакета.

Распространение волн в медленно изменяющейся и движущейся среде может быть описано кинематическим уравнением сохранения плотности числа волн

$$\partial k / \partial t + \nabla \omega = 0, \quad (1)$$

где ω — частота в неподвижной системе отсчета. В среде, неоднородно движущейся со скоростью U , это уравнение принимает вид /1, 2/:

$$\partial k / \partial t + \nabla (\sigma + kU) = 0, \quad (2)$$

где σ — собственная частота волн в движущейся со средой системе координат. Уравнение (2) представляет общий принцип, справедливый для бездиссипативных волн малой амплитуды любой физической природы. Специфика определяется дисперсионным соотношением $\sigma = \sigma(k)$.

В своей характеристической форме (2) эквивалентно системе

$$\partial k / \partial t = - (k \nabla) U, \quad \partial X / \partial t = \partial \omega / \partial k, \quad (3)$$

где второе уравнение задает направления характеристик, а первое — условие, выполняемое на них.

Если вектор скорости не зависит от времени ($u = u(X)$), то из системы (3) следует сохранение наблюдаемой частоты волнового пакета вдоль характеристических направлений

$$\sigma + kU = \Omega_0, \quad (4)$$

причем $\Omega_0 = \text{const}$ определяется граничными и начальными условиями задачи на соответствующих характеристиках.

Традиционный анализ уравнения (2) сводился к двум этапам /3, 4/: определению траекторий волнового пакета в пространстве $\{k, U(X)\}$ с использованием только интеграла движения Ω_0 и расчету времени движения вдоль траекторий на основе второго уравнения системы (3). Такой способ достаточно нагляден и позволяет обнаружить основные черты поведения волн: слабую модуляцию длины и направления волнового вектора: отражение и "захват" траекторий неоднородным течением и т.п.

Однако при этом рассмотрении вне его рамок оказывается сама проблема существования и единственности гладкого решения гиперболического уравнения (2). В теории хорошо известны примеры нарушения гладкости решения, возникающего при пересечении характеристик /5/. Отсюда вытекает необходимость поиска так называемых "слабых" решений задачи, включающей разрывные функции (ударные волны).

В качестве иллюстрации существования таких решений рассмотрим взаимодействие плоских гравитационных поверхностных волн ($\sigma = |k|^{1/2}$ в системе единиц, где ускорение силы тяжести $g = 1$) с течением $U(X)$. Из системы (3) находим

$$\sqrt{k} + kU(\xi) = \Omega(\xi), \quad dX/dt = 1/2 \sqrt{k} + U(X), \quad (5)$$

где ξ — характеристическая переменная, например, $\xi = X|_{t=0}$. Исключая k из системы (5), получим уравнение характеристик

$$t = 4\Omega(\xi) \int_{\xi}^X \frac{dX}{w(w \pm 1)}, \quad w(\xi, X) = (1 + 4\Omega(\xi)U(X))^{1/2}. \quad (6)$$

Начальное положение разрывов определяется огибающей семейства (6) в пространстве $\{X, t\}$, т.е. совместным решением (6) и уравнения $\frac{\partial}{\partial \xi} [t - 4\Omega(\xi) \int_{\xi}^X \frac{dX}{w(w \pm 1)}] = 0$ при заданной форме течения $U(X)$.

Решение этой задачи получено при помощи компактной разностной схемы третьего порядка [6], обладающей весьма малыми дисперсионной ошибкой и диссипацией, заметными лишь в области самых малых масштабов l , разрешаемых сеткой с шагом h ($h \approx l$).

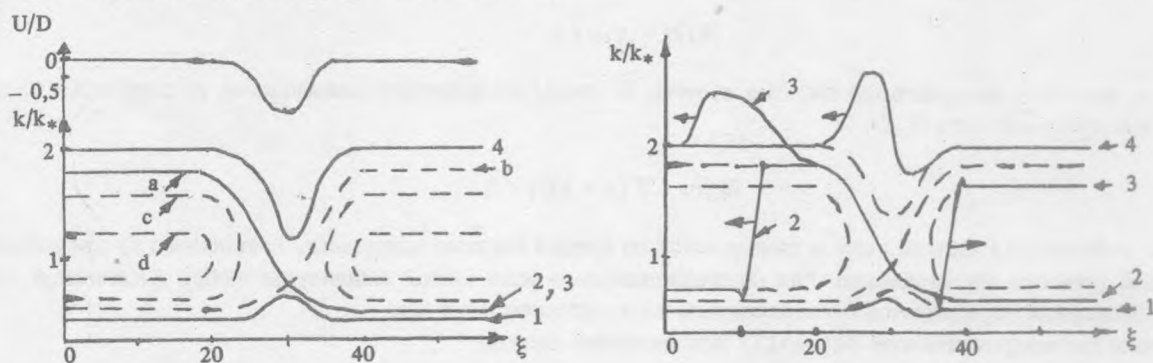


Рис. 1. Зависимость волнового числа $k = k(\xi, t)$, установившегося на переменном течении $U = U(\xi)$ (верхний график) для начальных условий $k/k_*|_{t=0} = 0,326$ (сплошная кривая 1); 0,523 (2); 1,63 (3); 2,04 (4); штриховыми линиями показаны соответствующие точные стационарные решения уравнения (2).

Рис. 2. Решения $k = k(\xi, t)$ в процессе установления в моменты времени $t = 10^2$ (1), $5 \cdot 10^3$ (2), 10^3 (3), 10^2 (4); стрелки показывают направления фронтов. Штриховые линии — соответствующие стационарные решения. Начальные условия те же, что и на рис. 1.

Результаты расчетов представлены на рис. 1 и 2, где показаны зависимости $k(\xi)$ для случая трансформации поверхностной волны течением, заданным в форме $U(X) = -U_0 \exp(-[(X - Dt)/L]^2)$. Для нормировки исходных данных и результатов расчетов примем D за характерную скорость, а в качестве характерного размера выберем величину $L = k_*^{-1}$, где k_* — волновое число, соответствующее групповой скорости волн, т.е. $k_* = g/(4D^2)$ (g — ускорение свободного падения). При задании начальных данных считаем, что $U_0 = 0,15$, а L выбираем так, что $U(\xi) = 0,01 U_0$ при $\xi = 123$. График функции $U(\xi)$ представлен в верхней части рис. 1, где по горизонтальной оси отложены номера узлов расчетной сетки с шагом $h_\xi = 12,3$. При проведении расчетов начальные данные брались в виде $k(\xi) = \text{const}$, а граничные условия задавались в зависимости от направления движения соответствующего волнового пакета — значение k фиксировалось на входной границе и сносилось из приграничного узла на выходной.

Рассмотрены следующие варианты: $k|_{t=0} = 0,326; 0,523; 1,63; 2,04 k_*$. В нижней части рис. 1 сплошными кривыми показаны траектории, полученные после установления решения, штриховыми линиями — точные стационарные решения уравнения (2) для использовавшихся начальных данных. Траектории 1 и 4, лежащие вне области, ограниченной сепаратрисами a и b , точно совпадают с аналитическим решением, а траектории 2 и 3, лежащие первоначально между ними, после установления совпадают с сепаратрисой a . Таким образом, в рассматриваемой области течения отсутствуют волны со значениями волнового числа, лежащими между a и b .

На рис. 2 представлены типичные возможные решения в процессе установления, стрелками показано направление движения соответствующих участков кривых. Представленные здесь результаты могут быть интерпретированы следующим образом. Для начальных данных $k(\xi) = \text{const}$ из интервала оси k , заключенного между сепаратрисами a и b , с течением времени из-за пересечения характеристик (5) происходит формирование разрыва. Скорость его распространения, полученная из закона сохранения (2), определяется соотношением $C = (\omega_r - \omega_l) / (k_r - k_l)$, где индексами r и l отмечены значения справа и слева от фронта. Именно с такой скоростью распространяются "разрывы" (т.е. области резких градиентов) кривых 2 и 3 на рис. 2, отмеченные стрелками. Спустя некоторое время, эти разрывы выйдут за пределы расчетной области, а кривые для вариантов 2, 3 совпадут в ней с сепаратрисой a . Таким образом, течение $U(\xi)$ является своеобразным фильтром, отсекающим все значения k на оси ординат между сепаратрисами a и b . При этом стационарные решения для значений k в этом интервале (пунктирные линии c и d на рис. 1), содержащие точки отражения волнового пакета $dX/dt = 0$ /3, 4/, где нарушаются предположения геометрической оптики (решения типа "блокировки" и "захвата" волновых пакетов), не могут быть получены в результате эволюции непрерывного начального состояния $k(\xi)$. Для начальных распределений $k(\xi)$, находящихся в плоскости (ξ, k) вне области между сепаратрисами a и b , решения, изменяясь вдоль характеристик (5), с течением времени выходят на стационарный режим: например, кривые 1 и 4 после установления решения совпадают с соответствующими штриховыми линиями на рис. 1 и 2.

Для "положительных" течений $U(\xi) > 0$ или знакопеременных скоростей в приповерхностном слое картина стационарных решений, изображенная на рис. 1, меняется; однако, как показали расчеты, описанные выше качественные закономерности остаются в силе; они справедливы также и для других дисперсионных соотношений $\sigma(k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ursell F. J. Fluid Mech. 9, 333 (1960).
2. Whitham G. B. J. Fluid Mech., 9, 347 (1960).
3. Басович А. Я., Таланов В. И. Изв. АН СССР, Физика атмосф. океана, 13, 766 (1977).
4. Басович А. Я., Громов Е. М. Физика плазмы, 5, 833 (1979).
5. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.
6. Толстых А. И. ЖВММФ, 21, 339 (1981).

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 5 марта 1990 г.