Краткие сообщения по физике № 6-1990 г.

УДК 535.12

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА СВЕТОВОГО ПОЛЯ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ИНТЕНСИВНОСТИ В ОБЪЕМЕ

Т.И. Кузнецова

Получена формула, связывающая комплексное световое поле с распределением его интенсивности, заданным в объеме. Вывод проведен для полей с одномерной поперечной структурой и основан на преобразовании Фурье.

В литературе описан ряд математических методов, позволяющих восстанавливать волновые фронты световых полей по распределениям интенсивности в двух сечениях поля, разделенных существенным расстоянием /1/, или в двух близких сечениях /2, 3/. В /4/ предложено регистрировать интенсивность не в двух, а в нескольких сечениях и использовать на этапе восстановления все эти данные. Обобщая этот подход, в /5/ предложено рассмотреть случай, когда данные об интенсивности записаны в объеме; там же были выведены выражения для функции Вигнера комплексного поля с помощью преобразования Радона. Близкие результаты для двумерного поля, а также исследования трехмерных полей с помощью преобразования Радона имеются в работе /6/. Здесь предлагается более простой путь установления связи поля с интенсивностью, основанный на преобразовании Фурье.

Рассмотрим монохроматический световой пучок, поперечная структура которого зависит только от одной координаты

$$\mathcal{E} = \mathrm{Re}E(x, z)\exp(-i\omega t + ikz). \tag{1}$$

Пусть комплексное поле $E(x, z)$ в выражении (1) удовлетворяет параболическому уравнению:

$$(2ik\partial/\partial z + \partial^2/\partial x^2)\, E(x, z) = 0. \tag{2}$$

Выразим поле $E(x, z)$ через компоненты Фурье; используя (2), можем записать

$$E(x, z) = \int dq_1 \widetilde{E}(q_1)\exp[iq_1 x - iq_1^2 z/2k] \tag{3}$$

Аналогичным образом представим сопряженное поле

$$E^*(x, z) = \int dq_2 \widetilde{E}^*(q_2)\exp[-iq_2 x + iq_2^2 z/2k], \tag{4}$$

а для интенсивности $I(x, z) = E(x, z)E^*(x, z)$ получим выражение

$$I(x, z) = \iint dq_1 dq_2 \widetilde{E}(q_1)\widetilde{E}^*(q_2)\exp[i(q_1 - q_2)x - i(q_1^2 - q_2^2)z/2k]. \tag{5}$$

Сделаем в (5) замену переменных $q_1 - q_2 = \alpha$, $(q_2^2 - q_1^2)/2k = \beta$. При этом получим $dq_1 dq_2 = -(k/\alpha)d\alpha d\beta$,

$$I(x, z) = \iint d\alpha d\beta\, \widetilde{E}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{k\beta}{\alpha}\right)\widetilde{E}^*\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{k\beta}{\alpha}\right)\left(-\frac{k}{\alpha}\right)\exp(i\alpha x + i\beta z). \tag{6}$$

Выражение (6) представляет собой разложение пространственного распределения интенсивности в интеграл Фурье. С помощью обратного преобразования Фурье находим:

$$\tilde{E}\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{k\beta}{\alpha}\right)\tilde{E}^*\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{k\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{-k}{\alpha}\right)=\frac{1}{(2\pi)^2}\iint dxdz\, I(x,z)\exp(-i\alpha x-i\beta z)$$

или

$$\tilde{E}(q_1)\tilde{E}^*(q_2)=-\frac{q_1-q_2}{k}\frac{1}{(2\pi)^2}\iint dx'dz' I(x',z')\exp[-i(q_1-q_2)x'+i(q_1^2-q_2^2)z'/2k]. \qquad (7)$$

Выражение (7) после интегрирования по частям принимает вид:

$$\tilde{E}(q_1)\tilde{E}^*(q_2)=\frac{i}{k(2\pi)^2}\iint dx'dz'[\partial I(x',z')/\partial x']\exp[-i(q_1-q_2)x'+i(q_1^2-q_2^2)z'/2k]. \qquad (8)$$

Теперь для произведения $E(x_1,z)E^*(x_2,z)$ можно, используя (3), (4), написать

$$E(x_1,z)E^*(x_2,z)=\frac{i}{k(2\pi)^2}\iint dq_1dq_2\exp[i(q_1x_1-q_2x_2)-i(q_1^2-q_2^2)z/2k]\iint dx'dz'\times$$

$$\times[\partial I(x',z')/\partial x']\exp[-i(q_1-q_2)x'+i(q_1^2-q_2^2)z'/2k]= \qquad (9)$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\iint dx'dz'[\partial I(x',z')/\partial x']\exp\left[ik\frac{(x_1-x')^2-(x_2-x')^2}{2(z-z')}\right].$$

Положим в (9) $x_1=x$, $x_2=0$, при этом получим

$$E(x,z)E^*(0,z)=\frac{-1}{2\pi}\iint dx'dz'\frac{1}{z-z'}[\partial I(x',z')/\partial x']\exp\left[ik\frac{x^2-2xx'}{2(z-z')}\right]. \qquad (10)$$

Выражая поле $E(0,z)$ через интенсивность и фазу $E(0,z)=[I(0,z)]^{1/2}\exp[i\varphi(0,z)]$, приведем формулу (10) к виду

$$E(x,z)=\frac{-1}{2\pi}\exp[i\varphi(0,z)]\cdot[I(0,z)]^{-1/2}\iint dx'dz'\frac{1}{z-z'}\left[\frac{\partial}{\partial x'}I(x',z')\right]\exp\left[ik\frac{x^2-2xx'}{2(z-z')}\right]. \qquad (11)$$

В этой формуле содержится фазовый множитель $\exp[i\varphi(0,z)]$ – несущественная константа – и множители, зависящие только от интенсивности. Выражение (11) представляет собой искомую связь комплексного поля и его интенсивности.

Выражение, полученное в /5/ для функции Вигнера, может быть приведено к виду (11).

Рассмотрим, можно ли пользоваться формулой (11), если интенсивность задана не в бесконечно протяженной среде, а в конечном объеме. Основу вывода (11) составляет связь фурье-компонент комплексного поля и интенсивности (8). Допустим, что данные об интенсивности имеются для объема $|x|\leqslant L_x/2$, $0\leqslant z\leqslant L_z/2$, и подставим в (8) конечные пределы интегрирования

$$\tilde{E}(q_1)\tilde{E}^*(q_2)=\frac{i}{k}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-L_x/2}^{L_x/2}dx'\int_0^{L_z}dz'[\partial I(x',z')/\partial x']\exp[-i(q_1-q_2)x'+i(q_1^2-q_2^2)z'/(2k)]. \qquad (12)$$

Разложим в (12) интенсивность в интеграл Фурье, т.е. используем выражение

$$I(x', z') = \iint d\alpha\, d\beta \exp(i\alpha x' + i\beta z').$$

Затем, выполняя в (12) интегрирование по x', z', получим

$$\tilde{E}(q_1)\,\tilde{E}^*(q_2) = \frac{-1}{k(2\pi)^2} \iint d\alpha\, d\beta\, \tilde{I}(\alpha, \beta)\, \alpha \exp\left[i\left(\beta + \frac{q_1^2 - q_2^2}{2k}\right)\frac{L_z}{2}\right] \times$$
$$\times \operatorname{sinc}\left[(\alpha - q_1 + q_2)\frac{L_x}{2}\right] \operatorname{sinc}\left[\left(\beta + \frac{q_1^2 - q_2^2}{2k}\right)\frac{L_z}{2}\right] L_x L_z, \tag{13}$$

где $\operatorname{sinc} u = (\sin u)/u$. При таком представлении видно, что из-за конечных пределов интегрирования возникли множители $\operatorname{sinc}[(\alpha - q_1 + q_2) L_x/2]$, $\operatorname{sinc}[(\beta + (q_1^2 - q_2^2)/2k) L_z/2]$, с помощью которых фурье-образ интенсивности усредняется по α и β на интервалах $\Delta\alpha \approx 2\pi/L_x$, $\Delta\beta \approx 2\pi/L_z$ (см. (13)). Минимальные интервалы пространственных частот, на которых может заметно меняться функция $\tilde{I}(\alpha, \beta)$, определяются поперечником светового пучка D, и их величины составляют $\Delta\alpha_{min} = \pi/D$, $\Delta\beta_{min} = (\pi/D)^2/k$ (для оценок удобно взять то сечение поля, где поперечник является самым узким). Требуя, чтобы усредняющие функции имели узкие центральные максимумы, т.е. чтобы выполнялись условия $\Delta\alpha \leqslant \Delta\alpha_{min}$, $\Delta\beta \leqslant \Delta\beta_{min}$, получаем

$$L_x \geqslant D,\ L_z \geqslant 2\pi k D^2. \tag{14}$$

При выполнении условий (14) переход от бесконечных пределов интегрирования к конечным не должен вносить в восстанавливаемое поле значительных искажений, и в формуле (11) можно перейти к конечным пределам интегрирования. При этом восстановление поля будет проводиться на основе распределения интенсивности, заданного в конечном объеме. Разумеется, даже такое распределение содержит избыточную информацию.

Представляет интерес дальнейшее снижение избыточности информации, используемой при восстановлении, и сопоставление предложенного метода с методами восстановления поля по конечному числу сечений его интенсивности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферверда Х. А. В кн. Обратные задачи в оптике, ред. Болтс Г. П. М., Машиностроение, 1984, с. 21.
2. Teague M. R. Journ. Opt. Soc. Am., **73**, 1434 (1983).
3. Абрамочкин Е. Г. и др. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 3, 7 (1987).
4. Воронцов М. А., Кудряшов И. А., Шмальгаузен В. И. Оптика и спектроскопия, **63**, 329 (1987).
5. Кузнецова Т. И. Квантовая электроника, **15**, 1921 (1988).
6. Майер Б. О., Преображенский Н. Г. Оптика и спектроскопия, **68**, 410 (1990).

Поступила в редакцию 15 марта 1990 г.