

УДК 537.312.62

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ВИХРЕЙ В СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ

А. С. Малишевский, В. П. Силин, А. В. Студенов

Для вихревого состояния в слоистой структуре из трех сверхпроводящих пленок применена модель Сакаи-Татено-Педерсена. В рамках этой модели дано аналитическое описание джозефсоновского вихря (2π -кинка) в одном джозефсоновском переходе и его изображения в другом джозефсоновском переходе.

Связанные магнитным полем длинные джозефсоновские переходы в слоистых структурах привлекают большое внимание (см., например, [1 – 5]). В таких системах джозефсоновский вихрь в одном из переходов порождает свое изображение в других переходах. Для случая системы двух магнитно-связанных переходов такое явление обсуждалось в работе [4] в пределе необычно большой плотности критического тока Джозефсона j_c , а в работе [5] в обычном пределе сравнительно небольших значений j_c . При этом в [4] соответствующее решение электродинамической задачи получено в рамках теории возмущений, а в [5] – численно. В работах [4, 5] рассмотрение проводилось в рамках обычной синусной зависимости джозефсоновского тока от разности фаз куперовских пар. С другой стороны, представляется продуктивным использование модели Сакаи-Татено-Педерсена [6], в которой, как это показано ниже, возможно относительно несложное аналитическое описание вихрей в слоистых джозефсоновских структурах. Этому посвящено настоящее сообщение.

Будем рассматривать слоистую структуру трех одинаковых сверхпроводящих пленок, образующую два одинаковых джозефсоновских перехода. Если φ_1 – разность фаз волновых функций куперовских пар в первом джозефсоновском переходе, а φ_2 – соответствующая разность фаз во втором переходе, то в соответствии с работами [1 – 3] для φ_1 и φ_2 имеет место следующая система уравнений (ср. [3]):

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} - \sin \varphi_1 = \frac{\beta}{\omega_j^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \tilde{\lambda}_j^2 \frac{S}{D} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{j_1}{j_c}, \\ \tilde{\lambda}_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} - \sin \varphi_2 = \frac{\beta}{\omega_j^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \tilde{\lambda}_j^2 \frac{S}{D} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{j_2}{j_c}. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $S \equiv \lambda/\text{sh}(2L/\lambda)$, $D \equiv 2d + 2\lambda\text{cth}(2L/\lambda) > S$, при этом $2L$ – толщина сверхпроводящих пленок, образующих слоистую структуру, $2d$ – толщина несверхпроводящих слоев между сверхпроводящими пленками, λ – лондоновская глубина; $\tilde{\lambda}_j^2 \equiv 2(\lambda + d)D\lambda_j^2/(D^2 - S^2)$, где $\lambda_j \equiv \sqrt{c\phi_0/16\pi^2 j_c(\lambda + d)}$ – джозефсоновская длина, ϕ_0 – квант магнитного потока, j_c – критическая плотность тока Джозефсона, которая считается одинаковой для обоих переходов; $\omega_j \equiv 4\pi\sqrt{j_c cd/\epsilon\phi_0}$ – джозефсоновская частота (ϵ – диэлектрическая постоянная несверхпроводящих слоев), β характеризует диссипацию, j_1 и j_2 – плотности токов, пропускаемых через первый и второй переходы соответственно (см. [1]). Система (1) справедлива при достаточно малой критической плотности тока j_c (см. [4]). В дальнейшем, интересуясь свободным движением вихрей, мы будем пренебрегать диссипацией и считать, что на джозефсоновские переходы не подается ток. Поэтому далее полагаем $\beta = j_1 = j_2 = 0$.

Целью настоящей работы является аналитическое исследование такого состояния системы двух переходов, когда в первом джозефсоновском переходе имеется один джозефсоновский вихрь (2π -кинк), а второй переход содержит изображение этого вихря (0π -кинк) в терминологии работы [5]. Решение такой задачи ниже проводится в рамках модели Сакаи–Татено–Педерсена, которая была успешно применена в работе [6] для исследования динамики джозефсоновского вихря в единичном джозефсоновском переходе. В этой модели используется замена синусной нелинейности кусочно-линейной пилообразной функцией. В применении к системе уравнений (1) эта замена имеет вид

$$\sin \varphi_i \rightarrow F(\varphi_i) \equiv \frac{2}{\pi} \begin{cases} \varphi_i, & -\pi/2 < \varphi_i < \pi/2, \\ \pi - \varphi_i, & \pi/2 < \varphi_i < 3\pi/2, \\ \varphi_i - 2\pi, & 3\pi/2 < \varphi_i < 5\pi/2, \end{cases} \quad (2)$$

$i = 1, 2$. Функция $F(\varphi_i)$, моделирующая синус, записана на интервале изменения φ_i от $-\pi/2$ до 2π . Этого достаточно для решения поставленной нами задачи.

Итак, при учете всех изложенных выше предположений, в рамках модели Сакаи–Татено–Педерсена (2) система уравнений (1) приобретает вид

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + \tilde{\lambda}_j^2 \frac{S}{D} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = F(\varphi_1), \\ \tilde{\lambda}_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} + \tilde{\lambda}_j^2 \frac{S}{D} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = F(\varphi_2). \end{cases} \quad (3)$$

Для сравнения с дальнейшим материалом приведем решение в виде 2π -кинка для модели Сакаи–Татено–Педерсена в одиночном джозефсоновском переходе [7]. Такое решение описывает, например, распределение разности фаз в первом переходе, когда толщины $2L$ сверхпроводящих пленок стремятся к бесконечности:

$$\varphi_1(\zeta) = \begin{cases} 2\pi - (\pi/2) \exp[-k_j \zeta + (\pi/4)], & \zeta > \pi/4k_j, \\ \pi + (\pi/\sqrt{2}) \sin(k_j \zeta), & -\pi/4k_j < \zeta < \pi/4k_j, \\ (\pi/2) \exp[k_j \zeta + (\pi/4)], & \zeta < -\pi/4k_j. \end{cases}$$

Здесь $\zeta \equiv z - vt$ – координата в сопутствующей вихрю системе отсчета, v – скорость движения 2π -кинка,

$$k_j \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\lambda_j} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/v_s)^2}}, \quad (4)$$

$v_s \equiv \omega_j \lambda_j$ – скорость Свихарта.

В соответствии с поставленной задачей, ниже, с помощью системы уравнений (3), мы исследуем такую ситуацию, когда в первом джозефсоновском переходе существует джозефсоновский вихрь, то есть φ_1 изменяется от 0 до 2π , а во втором джозефсоновском переходе имеется его изображение, о котором в работе [4] говорится как о возмущении бисолитонного вида. При этом мы ограничимся областью достаточно малых скоростей, когда

$$(v/\tilde{v}_s)^2 < 1 - (S/D), \quad (5)$$

где $\tilde{v}_s \equiv \omega_j \tilde{\lambda}_j$ – обобщенная скорость Свихарта. Далее будет выяснено, что при таких скоростях $|\varphi_2| < \pi/2$, поэтому в системе (3) полагаем $F(\varphi_2) = 2\varphi_2/\pi$.

Остановимся теперь на вопросе о малых волновых возмущениях, описываемых системой (3). Если φ_1 мало, $\varphi_1 = \delta\varphi_1$, или φ_1 мало отличается от 2π , $\varphi_1 = 2\pi + \delta\varphi_1$, а возмущение во втором переходе также является малым, $\varphi_2 = \delta\varphi_2$, то система уравнений (3) принимает вид

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_j^2 \frac{\partial^2 \delta\varphi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \delta\varphi_1}{\partial t^2} + \tilde{\lambda}_j^2 \frac{S}{D} \frac{\partial^2 \delta\varphi_2}{\partial z^2} = \frac{2}{\pi} \delta\varphi_1, \\ \tilde{\lambda}_j^2 \frac{\partial^2 \delta\varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \delta\varphi_2}{\partial t^2} + \tilde{\lambda}_j^2 \frac{S}{D} \frac{\partial^2 \delta\varphi_1}{\partial z^2} = \frac{2}{\pi} \delta\varphi_2. \end{cases} \quad (6)$$

Для волновой зависимости

$$\delta\varphi_1, \delta\varphi_2 \propto \exp(ikz - i\omega t) \quad (7)$$

из системы уравнений (6) получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2(k) = (2/\pi)\omega_j^2 + \tilde{v}_s^2 k^2 [1 \pm (S/D)]. \quad (8)$$

Предположим, что волновое возмущение со спектром (8) создается источником, движущимся с постоянной скоростью v . Используя условие черенковского резонансного взаимодействия источника излучения с волной

$$\omega^2(k) = k^2 v^2, \quad (9)$$

и подставляя в него соотношение (8), получаем следующие выражения для чисел k , характеризующих создаваемое источником возмущение:

$$k = \pm ik_-, \pm ik_+, \quad (10)$$

$$k_- \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/\tilde{v}_s)^2 + (S/D)}}, \quad (11)$$

$$k_+ \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/\tilde{v}_s)^2 - (S/D)}}. \quad (12)$$

Из формул (7) и (10) видно, что источник (вихрь), движущийся с малой скоростью (5), не может возбуждать волны со спектром (8). Создаваемые вихрем возмущения экспоненциально меняются на характерных масштабах $1/k_-$ и $1/k_+$ в окрестности источника возмущений.

Теперь, имея в виду применение результатов к ситуации, когда в первом переходе имеется движущийся с постоянной скоростью 2π -кинк, рассмотрим такие волновые возмущения, когда φ_1 мало отличается от π , т.е. $\varphi_1 = \pi + \delta\varphi_1$, а возмущение φ_2 мало, т.е. $\varphi_2 = \delta\varphi_2$. Тогда из системы уравнений (3) имеем для $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$:

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_j^2 \frac{\partial^2 \delta\varphi_1}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \delta\varphi_1}{\partial t^2} + \tilde{\lambda}_j^2 \frac{S}{D} \frac{\partial^2 \delta\varphi_2}{\partial z^2} = -\frac{2}{\pi} \delta\varphi_1, \\ \tilde{\lambda}_j^2 \frac{\partial^2 \delta\varphi_2}{\partial z^2} - \frac{1}{\omega_j^2} \frac{\partial^2 \delta\varphi_2}{\partial t^2} + \tilde{\lambda}_j^2 \frac{S}{D} \frac{\partial^2 \delta\varphi_1}{\partial z^2} = \frac{2}{\pi} \delta\varphi_2. \end{cases} \quad (13)$$

Подставляя волновые зависимости (7) для $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$, из (13) получаем следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^2(k) = \tilde{v}_s^2 k^2 \pm \omega_j^2 \sqrt{(2/\pi)^2 + (\tilde{\lambda}_j^2 k^2 S/D)^2}. \quad (14)$$

Очевидно, что при малых k и знаке минус выражение (14) отвечает неустойчивости невозмущенной структуры $\varphi_1 = \pi$, $\varphi_2 = 0$. Подстановка выражения (14) в условие (9) черенковского взаимодействия с источником возмущений приводит к следующим выражениям для характерных чисел k :

$$k = \pm i k_0, \pm k_0, \quad (15)$$

$$k_0 \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \frac{1}{\sqrt{[1 - (v/\tilde{v}_s)^2]^2 - (S/D)^2}}}. \quad (16)$$

Формулы (7) и (15) показывают, что медленно движущийся источник (5) создает не только экспоненциально зависящее от координат возмущение, но и волновое, отвечающее действительному решению (16).

Теперь приведем решение системы уравнений (3), описывающее движущийся с постоянной скоростью v 2π -кинк в первом переходе и согласованно движущееся вместе с ним его изображение во втором переходе. При записи решения предполагаем, что $|\varphi_2| < \pi/2$. Это предположение будет проверено в следующем разделе. Будем использовать обозначение

$$\mu \equiv \frac{S/D}{1 - (v/\tilde{v}_s)^2}. \quad (17)$$

Скорость вихря (2π -кинка) считаем достаточно малой, удовлетворяющей неравенству (5), поэтому $\mu < 1$. То, что мы ищем решение системы уравнений (3), отвечающее 2π -кинку в первом переходе, означает, что ось ζ разбивается на три участка.

На первом участке, соответствующем хвостовой части 2π -кинка, когда $\zeta < -\zeta_0$ и когда $0 < \varphi_1 < \pi/2$, решение записываем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \exp[k_-(\zeta + \zeta_0)] + A_2 \exp[k_+(\zeta + \zeta_0)], \\ \varphi_2 &= -A_1 \exp[k_-(\zeta + \zeta_0)] + A_2 \exp[k_+(\zeta + \zeta_0)]. \end{aligned}$$

Здесь A_1 и A_2 – константы, которые определены ниже; k_- и k_+ определяются формулами (11) и (12); выраженные через параметр μ (17), они имеют вид

$$k_- = \frac{\tilde{k}_j}{\sqrt{1 - \mu}}, \quad k_+ = \frac{\tilde{k}_j}{\sqrt{1 + \mu}}, \quad (18)$$

где обозначено (ср. (4))

$$\tilde{k}_j \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\tilde{\lambda}_j} \frac{1}{\sqrt{1 - (v/\tilde{v}_s)^2}}. \quad (19)$$

На втором участке $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$, отвечающем средней части 2π -кинка, когда $\pi/2 < \varphi_1 < 3\pi/2$, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \pi + B_1 \sin(k_0 \zeta) - NB_2 \operatorname{sh}(k_0 \zeta), \\ \varphi_2 &= -NB_1 \sin(k_0 \zeta) + B_2 \operatorname{sh}(k_0 \zeta), \end{aligned}$$

где константы B_1 и B_2 определены ниже, k_0 дается формулой (16). В принятых обозначениях для μ (17) и \tilde{k}_j (19) имеем

$$k_0 = \frac{\tilde{k}_j}{\sqrt[4]{1 - \mu^2}}. \quad (20)$$

Наконец, константа N имеет вид

$$N \equiv \frac{\mu}{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}.$$

На последнем участке, отвечающем голове вихря, когда $\zeta > \zeta_0$ и $3\pi/2 < \varphi_1 < 2\pi$, имеем следующие выражения для разностей фаз φ_1 и φ_2 :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\pi - A_1 \exp[-k_-(\zeta - \zeta_0)] - A_2 \exp[-k_+(\zeta - \zeta_0)], \\ \varphi_2 &= A_1 \exp[-k_-(\zeta + \zeta_0)] - A_2 \exp[-k_+(\zeta + \zeta_0)]. \end{aligned}$$

Константы A_1, A_2, B_1, B_2 и размер $2\zeta_0$ внутренней области вихря находятся из условий непрерывности разностей фаз φ_1 и φ_2 и их первых производных в точках $\zeta = -\zeta_0$ и $\zeta = \zeta_0$. Также используются требования $\varphi_1(-\zeta_0) = \pi/2$ и $\varphi_1(\zeta_0) = 3\pi/2$ [6]. В результате оказывается, что A_1, A_2, B_1, B_2 имеют вид

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\pi}{4C} \{2(1 + N) \operatorname{sh}(k_0 \zeta_0) \sin(k_0 \zeta_0) + \\ &+ (1 - N)(k_0/k_+) [\sin(k_0 \zeta_0) \operatorname{ch}(k_0 \zeta_0) - \operatorname{sh}(k_0 \zeta_0) \cos(k_0 \zeta_0)]\}, \\ A_2 &= \frac{\pi}{4C} \frac{k_0}{k_+} (1 + N) [\sin(k_0 \zeta_0) \operatorname{ch}(k_0 \zeta_0) - \operatorname{sh}(k_0 \zeta_0) \cos(k_0 \zeta_0)], \\ B_1 &= \frac{\pi}{2C} \left[\frac{(1 + N)}{(1 - N)} \operatorname{sh}(k_0 \zeta_0) + \frac{k_0}{k_+} \operatorname{ch}(k_0 \zeta_0) \right], \end{aligned}$$

$$B_2 = \frac{\pi}{2C} \left[\frac{(1+N)}{(1-N)} \sin(k_0 \zeta_0) - \frac{k_0}{k_+} \cos(k_0 \zeta_0) \right],$$

где введено обозначение

$$C \equiv \left\{ (1+N) \operatorname{sh}(k_0 \zeta_0) \sin(k_0 \zeta_0) + \right. \\ \left. + (k_0/k_+) [\sin(k_0 \zeta_0) \operatorname{ch}(k_0 \zeta_0) + N \operatorname{sh}(k_0 \zeta_0) \cos(k_0 \zeta_0)] \right\}.$$

Уравнение, из которого определяется величина ζ_0 , характеризующая размер вихря, имеет вид

$$\frac{\operatorname{th}(k_0 \zeta_0) - \operatorname{tg}(k_0 \zeta_0)}{\operatorname{th}(k_0 \zeta_0) \operatorname{tg}(k_0 \zeta_0) - 1} = \frac{2\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{1-\mu} + \sqrt{1+\mu}}. \quad (21)$$

При фиксированных L и v (или \tilde{k}_j и μ) это уравнение имеет счетное число корней ζ_0 .

Теперь мы покажем, что при изменении скорости вихря v от нуля до максимальной скорости $\tilde{v}_s \sqrt{1-S/D}$ (см. (5)), ограничивающей область применимости решения, указанного в предыдущем пункте, разность фаз φ_2 остается по абсолютной величине меньше $\pi/2$, и только при скорости v , стремящейся к предельной $\tilde{v}_s \sqrt{1-S/D}$, величина $|\varphi_2|$ достигает снизу значения $\pi/2$ в некоторых точках оси ζ .

Сначала рассмотрим случай малых скоростей или слабого взаимодействия двух джозефсоновских переходов, когда

$$(v/\tilde{v}_s)^2 \ll 1 - (S/D). \quad (22)$$

Это означает, что $\mu \ll 1$ (см. (17)). В этом случае наименьший положительный корень уравнения (21) дается формулой

$$\tilde{k}_j \zeta_0 \approx \frac{\pi}{4} - \frac{\pi \mu^2}{16} [1 + \exp(-\pi/2)],$$

где \tilde{k}_j определено формулой (19). При этом выражения для φ_1, φ_2 имеют вид при $\zeta < -\zeta_0$

$$\varphi_1 \approx \frac{\pi}{2} \exp[\tilde{k}_j(\zeta + \zeta_0)] \operatorname{ch} \left[\frac{\tilde{k}_j \mu}{2} (\zeta + \zeta_0) \right] - \\ - \frac{\pi}{4} \mu \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{4} \right) \exp \left[\tilde{k}_j(\zeta + \zeta_0) - \frac{\pi}{4} \right] \operatorname{sh} \left[\frac{\tilde{k}_j \mu}{2} (\zeta + \zeta_0) \right],$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 \approx & -\frac{\pi}{2} \exp[\tilde{k}_j(\zeta + \zeta_0)] \operatorname{sh} \left[\frac{\tilde{k}_j \mu}{2} (\zeta + \zeta_0) \right] + \\ & + \frac{\pi}{4} \mu \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{4} \right) \exp \left[\tilde{k}_j (\zeta + \zeta_0) - \frac{\pi}{4} \right] \operatorname{ch} \left[\frac{\tilde{k}_j \mu}{2} (\zeta + \zeta_0) \right]; \end{aligned} \quad (23)$$

при $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$

$$\varphi_1 \approx \pi + (\pi/\sqrt{2}) \sin(\tilde{k}_j \zeta) + O(\mu^2), \quad (24)$$

$$\varphi_2 \approx -\frac{\mu\pi}{2\sqrt{2}} \sin(\tilde{k}_j \zeta) + \frac{\mu\pi}{4} \exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sh}(\tilde{k}_j \zeta); \quad (25)$$

при $\zeta > \zeta_0$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \approx & 2\pi - \frac{\pi}{2} \exp[-\tilde{k}_j(\zeta - \zeta_0)] \operatorname{ch} \left[\frac{\tilde{k}_j \mu}{2} (\zeta - \zeta_0) \right] - \\ & - \frac{\pi}{4} \mu \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{4} \right) \exp \left[-\tilde{k}_j (\zeta - \zeta_0) - \frac{\pi}{4} \right] \operatorname{sh} \left[\frac{\tilde{k}_j \mu}{2} (\zeta - \zeta_0) \right], \\ \varphi_2 \approx & -\frac{\pi}{2} \exp[-\tilde{k}_j(\zeta - \zeta_0)] \operatorname{sh} \left[\frac{\tilde{k}_j \mu}{2} (\zeta - \zeta_0) \right] - \\ & - \frac{\pi}{4} \mu \operatorname{ch} \left(\frac{\pi}{4} \right) \exp \left[-\tilde{k}_j (\zeta - \zeta_0) - \frac{\pi}{4} \right] \operatorname{ch} \left[\frac{\tilde{k}_j \mu}{2} (\zeta - \zeta_0) \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Из формул (23), (25), (26) для φ_2 видно, что наибольшее значение $|\varphi_2|$ порядка μ и, поскольку μ мало по сравнению с единицей (см. (22)), то максимальное значение модуля φ_2 меньше $\pi/2$. Иллюстрация решения при небольшом μ дана на рис. 1а. Верхняя сплошная кривая отвечает монотонному нарастанию φ_1 от 0 до 2π при изменении безразмерной координаты ξ от $-\infty$ до $+\infty$, то есть эта кривая иллюстрирует структуру 2π -кинка в первом переходе. Функция φ_2 , изображенная на рис. 1а нижней пунктирной кривой, описывает бисолитонное возмущение во втором переходе, то есть изображение 2π -кинка φ_1 . Из рис. 1а видно, что даже при не очень малом значении параметра μ абсолютное значение функции φ_2 мало по сравнению с $\pi/2$. На рис. 1б изображены первые пространственные производные разностей фаз в первом и втором переходах. Эти зависимости характеризуют распределение магнитных полей в обоих переходах.

Теперь рассмотрим случай, когда скорость вихря v близка к предельной, то есть считаем, что выполнено неравенство

$$0 < 1 - \frac{S}{D} - \frac{v^2}{\tilde{v}_s^2} \ll 1. \quad (27)$$

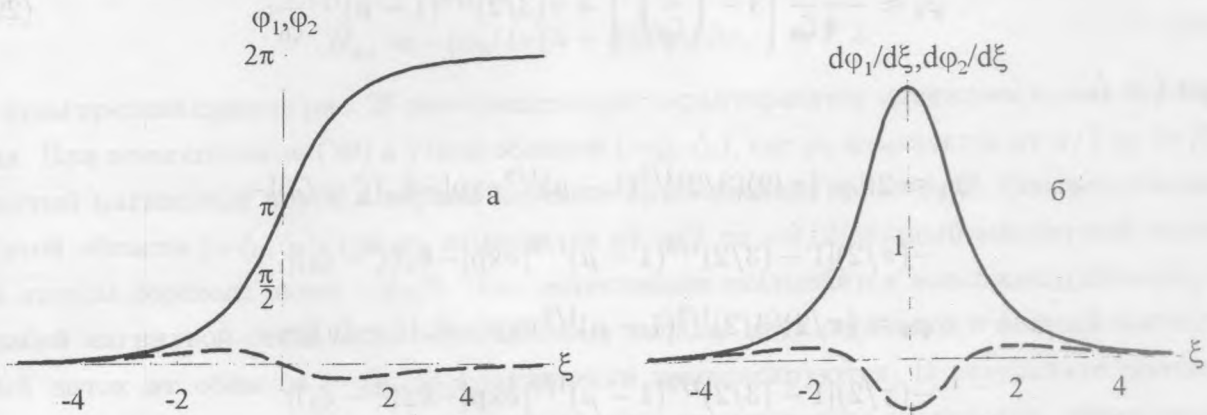


Рис. 1. Распределение разностей фаз $\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)$ (а) и производных $\varphi'_1(\xi), \varphi'_2(\xi)$ (б) при малых скоростях ($\mu = 0.5$), $\xi \equiv \bar{k}_j \zeta$. Сплошные кривые отвечают первому переходу, пунктирные – второму переходу,

В соответствии с формулами (17) и (27) $0 < 1 - \mu \ll 1$.

Для наименьшего положительного корня уравнения (21) находим приближенное выражение

$$k_0 \zeta_0 \approx 3^{1/3} 2^{-1/12} (1 - \mu)^{1/12} \ll 1. \quad (28)$$

Здесь k_0 определяется формулой (20). В пределе, когда применимо выражение (27) для ζ_0 , получаем следующие приближенные формулы для разностей фаз:

при $\zeta < -\zeta_0$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\approx (\pi/2)(3/2)^{1/3}(1 - \mu)^{1/3} \exp[k_-(\zeta + \zeta_0)] + \\ &+ (\pi/2)[1 - (3/2)^{1/3}(1 - \mu)^{1/3}] \exp[k_+(\zeta + \zeta_0)], \\ \varphi_2 &\approx -(\pi/2)(3/2)^{1/3}(1 - \mu)^{1/3} \exp[k_-(\zeta + \zeta_0)] + \\ &+ (\pi/2)[1 - (3/2)^{1/3}(1 - \mu)^{1/3}] \exp[k_+(\zeta + \zeta_0)]; \end{aligned}$$

при $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$

$$\varphi_1 \approx \pi + \frac{\pi \zeta}{4 \zeta_0} \left[3 - \left(\frac{\zeta}{\zeta_0} \right)^2 \right],$$

$$\varphi_2 \approx -\frac{\pi}{4} \frac{\zeta}{\zeta_0} \left[3 - \left(\frac{\zeta}{\zeta_0} \right)^2 \right] + \pi (3/2)^{1/3} (1 - \mu)^{1/3} \frac{\zeta}{\zeta_0}; \quad (29)$$

при $\zeta > \zeta_0$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\approx 2\pi - (\pi/2)(3/2)^{1/3}(1 - \mu)^{1/3} \exp[-k_-(\zeta - \zeta_0)] - \\ &\quad - (\pi/2)[1 - (3/2)^{1/3}(1 - \mu)^{1/3}] \exp[-k_+(\zeta - \zeta_0)], \\ \varphi_2 &\approx (\pi/2)(3/2)^{1/3}(1 - \mu)^{1/3} \exp[-k_-(\zeta - \zeta_0)] - \\ &\quad - (\pi/2)[1 - (3/2)^{1/3}(1 - \mu)^{1/3}] \exp[-k_+(\zeta - \zeta_0)]. \end{aligned}$$

Здесь k_- и k_+ определяются выражениями (18), $k_+ \approx \tilde{k}_j/\sqrt{2}$. Из формулы (29) для φ_2 в средней области видно, что φ_2 достигает экстремальных значений в точках близких к $\pm\zeta_0$ и принимает в этих точках значения, близкие к $\pm\pi/2$. Иллюстрация решения при μ близком к единице дана на рис. 2а. Из рис. 2а видно, что в голове вихрей пунктирная кривая (φ_2) приближенно повторяет со сдвигом на 2π сплошную кривую (φ_1). Это связано с тем, что при удалении от точки $\zeta = \zeta_0$ вправо на расстояние большее $1/k_-$, координатная зависимость функций φ_1 и φ_2 определяется экспонентой, в показателе которой стоит k_+ . Это означает, что $\varphi_1 - 2\pi \approx \varphi_2$. В весьма узкой срединной части вихрей функция φ_1 монотонно изменяется на π , а разность между максимальным и минимальным значениями φ_2 немного меньше π (см. (29)). При бóльших значениях параметра μ амплитуда изменения φ_2 в области $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$ с ростом μ все больше и больше приближается к π . В хвостовой части сплошная и пунктирные кривые практически не отличимы. Это связано с тем, что при удалении от точки $\zeta = -\zeta_0$ влево на расстояние больше $1/k_-$, функции φ_1 и φ_2 практически совпадают: $\varphi_1 \approx \varphi_2 \approx A_2 \exp[k_+(\zeta + \zeta_0)]$. Рисунок 2б, иллюстрирующий пространственную зависимость первых производных разностей фаз, дает представление о распределении магнитного поля в первом и втором джозефсоновских переходах, которое дается формулами

$$\begin{aligned} H_{y,1}(z, t) &= -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{D^2 - S^2} \left(D \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + S \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right), \\ H_{y,2}(z, t) &= -\frac{\phi_0}{2\pi} \frac{1}{D^2 - S^2} \left(D \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + S \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

В случае достаточно толстых сверхпроводящих пленок, когда $S/D \approx \exp(-2L/\lambda) \ll 1$, магнитное поле в переходах дается приближенной формулой

$$H_{y,i} \approx -[\phi_0/4\pi(\lambda + d)]\partial\varphi_i/\partial z, \quad i = 1, 2. \quad (30)$$

В этом пределе кривые рис. 2б непосредственно характеризуют магнитное поле в переходах. При этом согласно (30) в узкой области $(-\zeta_0, \zeta_0)$, где φ_1 изменяется от $\pi/2$ до $3\pi/2$, полный магнитный поток в первом переходе приблизительно равен $\phi_0/2$. Соответственно в этой области $(-\zeta_0, \zeta_0)$, где φ_2 изменяется от $\pi/2$ до $-\pi/2$, полный магнитный поток во втором переходе равен $-\phi_0/2$. Это, естественно оказывается возможным благодаря слабой магнитной связи переходов. Поэтому вклады двух переходов в полный магнитный поток от области $(-\zeta_0, \zeta_0)$ практически компенсируются. В результате полный магнитный поток, равный единичному кванту, складывается из потоков, образуемых сравнительно слабыми магнитными полями в областях $(-\infty, \zeta_0)$ и $(\zeta_0, +\infty)$. Однако устанавливаемое нами существование довольно сильного магнитного поля в узкой пространственной области рассмотренной вихревой структуры делает желательным его экспериментальное обнаружение.

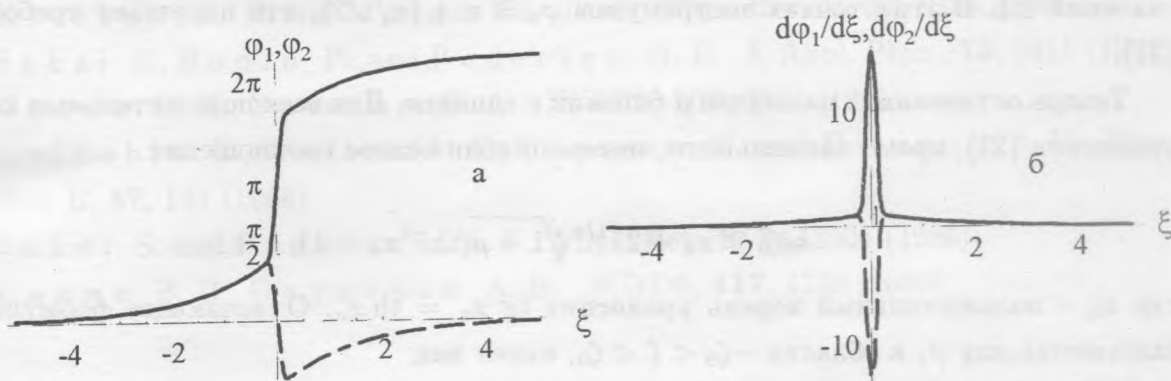


Рис. 2. Разности фаз $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$ (а) и их производные $\varphi'_1(\xi)$, $\varphi'_2(\xi)$ (б) при скоростях, близких к предельной ($\mu = 0.999$). Сплошные кривые отвечают первому переходу, пунктирные – второму переходу.

Таким образом мы показали, что в области (5) достаточно малых скоростей вихря абсолютная величина разности фаз во втором джозефсоновском переходе $|\varphi_2|$ остается меньше $\pi/2$ и стремится снизу к этому значению в точках близких к $\pm\zeta_0$ при стремлении v к предельному значению $\tilde{v}_s\sqrt{1 - (S/D)}$.

Итак, мы рассмотрели выражения для разностей фаз φ_1 и φ_2 , отвечающие наименьшему положительному корню уравнения (21), определяющему характерный размер вихря. Теперь рассмотрим другие корни этого уравнения и покажем, что отвечающие

таким корням выражения для φ_1 в средней области, где $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$, не удовлетворяют требованию

$$|\varphi_1 - \pi| < \pi/2, \quad (31)$$

которое необходимо для построения решения в виде 2π -кинка в первом джозефсоновском переходе с помощью модели Сакаи-Татено-Педерсена.

Рассмотрим сначала случай малых μ , когда $\mu \ll 1$. В этом пределе корни уравнения (21) даются выражением

$$\begin{aligned} \tilde{k}_j \zeta_0 \cong \frac{\pi}{4} + \pi n - \frac{\mu^2}{16} \left[\pi + 4\pi n + \exp\left(-\frac{\pi}{2} - 2\pi n\right) \right], \\ n \geq 1, \mu n \ll 1. \end{aligned} \quad (32)$$

Разность фаз φ_1 в средней области в первом джозефсоновском переходе, соответствующая этим корням, определяется выражением (24). Используя формулу (32), можно убедиться в том, что $\sin(\tilde{k}_j \zeta)$ достигает на интервале $(-\zeta_0, \zeta_0)$ своих экстремальных значений ± 1 . В этих точках экстремумов $\varphi_1 \cong \pi + (\pi/\sqrt{2})$, что нарушает требование (31).

Теперь остановимся на случае μ близких к единице. Для всех положительных корней уравнения (21), кроме наименьшего, имеем приближенное соотношение

$$k_0 \zeta_0 \cong x_n + 2^{-1/4} \sqrt{1 - \mu} (\text{th}^{-2} x_n - 1), \quad (33)$$

где x_n – положительный корень уравнения $\text{tg } x_n = \text{th } x_n$. Отвечающее формуле (33) выражение для φ_1 в области $-\zeta_0 < \zeta < \zeta_0$, имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_1 \cong \pi + \frac{\pi \text{sh}(k_0 \zeta)}{2 \text{sh}(k_0 \zeta_0)} + \\ + \frac{\pi}{2} \frac{1}{2^{3/4}} \frac{\text{tg}(k_0 \zeta_0)}{(1 - \mu)^{1/4}} \left[\frac{\sin(k_0 \zeta)}{\sin(k_0 \zeta_0)} - \frac{\text{sh}(k_0 \zeta)}{\text{sh}(k_0 \zeta_0)} \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Сравнивая (33) и (34), видим, что в выражении (34) при $\sin(k_0 \zeta)$ стоит большая амплитуда $\propto (1 - \mu)^{-1/4}$. Также замечаем, что на интервале $(-\zeta_0, \zeta_0)$ функция $\sin(k_0 \zeta)$ достигает значений ± 1 , поэтому выражение (34) нарушает требование (31).

Развитая нами теория, основанная на системе уравнений (1), является локальной, то есть характерные пространственные масштабы изменения φ_1 и φ_2 считаются большими по сравнению с лондоновской длиной λ . Поэтому, исходя из формул (11), (12) и

(16), наряду с требованием (5), имеем следующее ограничение на скорость v вихревых структур:

$$(\lambda/\tilde{\lambda}_j)^2 \ll 1 - (v/\tilde{v}_s)^2 - (S/D).$$

Подводя итог всему вышеизложенному, можно утверждать, что для структуры из трех сверхпроводящих пленок с двумя одинаковыми джозефсоновскими переходами в модели Сакаи-Татено-Педерсена дано аналитическое описание джозефсоновского вихря в одном переходе и изображения такого вихря в другом переходе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект N 00-02-16076), Научного совета по сверхпроводимости (задание "Вихри Абрикосова-Джозефсона") и при Государственной поддержке ведущих научных школ (проект N 00-15-96720).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Волков А. Ф. Письма в ЖЭТФ, **45**, 299 (1987).
- [2] Kivshar Yu. S. and Malomed D. A. Phys. Rev. B, **37**, 9325 (1988).
- [3] Sakai S., Bodin P., and Pedersen N. F. J. Appl. Phys., **73**, 2411 (1993).
- [4] Силин В. П., Урюпин С. А. ЖЭТФ, **108**, 2163 (1995).
- [5] Goldobin E., Wallraff A., Thyssen N., and Ustinov A. V. Phys. Rev. B, **57**, 130 (1998).
- [6] Sakai S. and Pedersen N. F. Phys. Rev. B, **34**, 3506 (1986).
- [7] Силин В. П., Студенов А. В. ЖЭТФ, **117**, 1230 (2000).

Поступила в редакцию 28 декабря 2000 г.