Краткие сообщения по физике № 10-1990 г.

УДК 530.145

ГЕНЕРАЦИЯ СЖАТОГО СВЕТА В РЕЗОНАТОРЕ С ДВИЖУЩИМИСЯ СТЕНКАМИ

В.В. Додонов, А.Б. Климов, В.И. Манько

Рассмотрена задача о генерации сжатых состояний в одномерном резонаторе с подвижной стенкой. Найдены коэффициенты сжатия и корреляции для гармонического закона движения стенки.

В последние годы внимание многих исследователей привлекает проблема генерации новых типов квантовых состояний электромагнитного поля — так называемых сжатых и коррелированных состояний /1–4/. В ряде работ для этой цели предлагается тем или иным способом использовать эффект изменения во времени параметров среды, заполняющей резонатор, в котором возбуждается исследуемая мода поля. В данной работе показано в рамках одномерной электродинамики, что возможна генерация сжатого света посредством изменения геометрии резонатора.

Предположим, что левая стенка резонатора покоится в точке $x = 0$, а правая движется по закону $L(t) > 0$. Стенки считаются бесконечными идеально проводящими плоскостями, перпендикулярными оси x. Точное решение для произвольного закона известно для тех мод поля, у которых вектор напряженности электрического поля **E** параллелен стенкам /5/. Пусть вектор **E** параллелен оси z; выберем калибровку, в которой скалярный потенциал равен нулю, а векторный потенциал имеет вид $A = \varphi(x,t)\vec{l}$ ($\mathbf{i}, \mathbf{j}, \vec{l}$ образуют правую тройку). В этом случае $(0 < x < L(t))$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial t}\vec{l}, \quad \mathbf{B} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{j}, \quad \varphi_{tt} - \varphi_{xx} = 0,$$
$$\varphi(x=0,t) = \varphi(x=L(t),t) = 0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) имеет вид /4/ $(c = 1)$

$$\psi_n(x,t) = (4\pi n)^{-1/2}\left\{\exp\left[-in\pi R(t-x)\right] - \exp\left[-in\pi R(t+x)\right]\right\}, \tag{2}$$

а функция $R(\xi)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$R(t + L(t)) = R(t - L(t)) + 2. \tag{3}$$

В каждый момент времени функции (2) образуют полную ортонормированную систему в интервале $(0, L(t))$

$$(\varphi,\chi) = -i\int_0^{L(t)} dx(\varphi\chi_t^* - \varphi_t\chi^*) = (\chi,\varphi)^* = -(\chi^*,\varphi^*),$$
$$(\psi_n,\psi_m^*) = 0, \quad (\psi_n,\psi_m) = \delta_{nm}. \tag{4}$$

Для неподвижных стенок $L(t) = L_0 = \mathrm{const}$ имеем

$$R_0(\xi) = \xi/L_0, \quad \psi_n^{(0)} = i(\pi n)^{-1/2}\sin(\pi n x/L_0)\exp(-i\pi n t/L_0).$$

Квантование поля $\varphi(x, t)$ производится обычным способом /5, 6/, т.е. разложением по полной системе модовых функций (2) и последующим объявлением коэффициентов разложения операторами, удовлетворяющих каноническим коммутационным соотношениям

$$[b_n, b_m^+] = \delta_{nm}, \quad [b_n, b_m] = 0. \tag{5}$$

Если стенки неподвижны, то

$$\hat{\varphi}(x, t) = \sum_n [b_n \psi_n^{(0)}(x, t) + b_n^+ \psi_n^{(0)*}(x, t)], \quad t < 0. \tag{6}$$

Когда стенки начинают двигаться при $t > 0$, то оператор поля имеет тот же вид (6), с правилами коммутации (5), но с заменой $\psi_n^{(0)}$ на решения нестационарной задачи $\psi_n(x, t)$ (2). При этом операторные коэффициенты не изменяются. Пусть через время T стенки заняли первоначальное положение, но функции $\psi_n(x,t)$ при этом не перейдут в решения стационарной задачи $\psi_n^{(0)}(x, t)$, а превратятся в их линейные комбинации

$$\begin{gathered}\psi_n(x, t) = \sum_m [\alpha_{nm} \psi_m^{(0)}(x, t) + \beta_{nm} \psi_m^{(0)*}(x, t)^*] \\ \alpha_{nm} = (\psi_n, \psi_m^{(0)}), \quad \beta_{nm} = -(\psi_n, \psi_m^{(0)*}).\end{gathered} \tag{7}$$

Таким образом, в конечном положении стенок оператор поля может быть представлен двумя способами

$$\hat{\varphi}(x, t) = \sum_n (b_n \psi_n + b_n^+ \psi_n^*) = \sum_m (a_m \psi_m^{(0)} + a_m^+ \psi_m^{(0)*}), \; t > T, \tag{8}$$

где $[a_n, a_m^+] = \delta_{nm}$, $[a_n, a_m] = 0$, $a_m = \sum_n (b_n \alpha_{nm} + b_n^+ \beta_{nm}^*)$. Пусть при $t < 0$ возбуждена одна мода поля с номером k. Соответствующее квантовое состояние обозначим $|\xi_k; \text{ in}\rangle$ и будем считать его когерентным, т.е. $b_n|\xi_k; \text{ in}\rangle = \xi_k \delta_{nk}|\xi_k; \text{ in}\rangle$. В процессе эволюции это состояние останется таким же по отношению к системе "старых" операторов b_n. Но при $t > T$, когда стенки стали неподвижными, физический смысл имеет система новых операторов a_m (8), так как именно они диагонализируют энергию поля, и операторы $a_n^+ a_n$ являются операторами числа квантов в n-ой моде резонатора. По отношению к этой системе операторов состояние $|\xi_k; \text{ in}\rangle$ уже не будет когерентным. Найдем дисперсии канонических координат и импульсов $x_q = (a_q + a_q^+)/\sqrt{2}$, $p_q = i(a_q - a_q^+)/\sqrt{2}$ в состоянии $|\xi_k; \text{ in}\rangle$

$$\begin{gathered}\sigma_{x_i x_j} = \delta_{ij}/2 + \mathrm{Re} \sum_n [\beta_{ni}^* \beta_{nj} + (\alpha_{ni} \beta_{nj}^* + \alpha_{nj} \beta_{ni}^*)/2], \\ \sigma_{p_i p_j} = \delta_{ij}/2 + \mathrm{Re} \sum_n [\beta_{ni}^* \beta_{nj} - (\alpha_{ni} \beta_{nj}^* + \alpha_{nj} \beta_{ni}^*)/2], \\ \sigma_{p_j x_i} = \mathrm{Im} \sum [\beta_{ni} \beta_{nj}^* + (\alpha_{ni} \beta_{nj}^* + \alpha_{nj} \beta_{ni}^*)/2].\end{gathered} \tag{9}$$

Из (7), учитывая формулы (4), получим выражения для α_{nm}, β_{nm}

$$\begin{gathered}\alpha_{nm} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{n}} \int_{t/L_0-1}^{t/L_0+1} dx \exp[-i\pi(nR(L_0 x) - mx)], \\ \beta_{nm} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{n}} \int_{t/L_0-1}^{t/L_0+1} dx \exp[-i\pi(nR(L_0 x) + mx)].\end{gathered} \tag{10}$$

Если стенка колеблется с малой амплитудой около положения равновесия L_0, то функцию $R(\xi)$ представим в виде $R(\xi) = R_0(\xi) + \rho(\xi)$, $|\rho(\xi)| \ll 1$; тогда из выражений (10) имеем

$$\alpha_{nm} \cong \delta_{nm} - \frac{i\pi\sqrt{mn}}{2} \int\limits_{t/L_0-1}^{t/L_0+1} dx\, \rho(L_0 x) \exp[-i\pi(n-m)x] + 0(\rho^2), \tag{11}$$

$$\beta_{nm} \cong -\frac{i\pi\sqrt{mn}}{2} \int\limits_{t/L_0-1}^{t/L_0+1} dx\, \rho(L_0 x) \exp[-i\pi(n+m)x] + 0(\rho^2).$$

Для дисперсий получим следующие выражения из (9) – (11):

$$\sigma_{x_i x_j} = \delta_{ij}/2 + \mathrm{Re}\beta_{ij} + 0(\rho^2),$$
$$\sigma_{p_i p_j} = \delta_{ij}/2 - \mathrm{Re}\beta_{ij} + 0(\rho^2), \tag{12}$$
$$\sigma_{x_i p_j} = -\mathrm{Im}\beta_{ij} + 0(\rho^2).$$

Рассмотрим гармонический закон $L(t) = L_0(1 + a \sin \omega t)$, $|a| \ll 1$. Из (3) получим уравнение для ρ

$$\rho(t - L_0) - \rho(t + L_0) = 2a \sin \omega t. \tag{13}$$

В резонансе, когда частота колебаний стенки совпадает с одной из собственных частот поля в резонаторе, $\omega = \omega_q = \pi q/L_0$, $q = 1, 2, \ldots$, решение уравнения (13) имеет вид:

$$\rho_1(\xi) = (-1)^{q-1} (a\xi/L_0) \sin \omega_q \xi, \quad |aq| \ll 1. \tag{14}$$

Из (11), (14) видно, что β_{nm} будут максимальны при $q = n + m$. Для дисперсий в одной моде $i = j$ получим, что они будут максимально отличаться от вакуумных, если $q = 2n$ /12/. Это условие параметрического резонанса: надо раскачивать моду на удвоенной собственной частоте. Так как формула (11) имеет смысл для тех моментов, когда координата стенки равна L_0, то $t/L_0 = N/q$, где N – число прошедших полупериодов колебаний стенки. Тогда получим

$$\beta_{nm} = (\pi a/4)(N + 1/2i\pi),$$
$$\sigma_{x_n x_n} = 1/2 + \pi a N/4, \quad \sigma_{x_n \rho_n} = -a/8, \tag{15}$$
$$\sigma_{p_n p_n} = 1/2 - \pi a N/4, \quad k = \sigma_{x_n x_n}/\sigma_{p_n p_n} = 1 + \pi a N,$$

т.е. коэффициент сжатия нарастает линейно со временем (при $|aN| \ll 1$). В нерезонансных модах сжатие от времени не зависит и в N раз меньше. Для резонатора с добротностью $Q = \omega_n/2\gamma$, где γ – амплитудный коэффициент затухания, $t \sim 1/2\gamma$ и $N_{max} \sim 2Q/\pi$. Тогда $|\Delta\sigma_{max}| \cong aQ/2$, $|aQ| \ll 1$. Можно вычислить поправки к $R_0(\xi)$, пропорциональные a^2:

$$R = R_0 + \rho_1 + \rho_2, \tag{16}$$

$$\rho_2(\xi) = a^2 [(\omega_q \xi^2/4L_0) \sin 2\omega_q \xi + (\xi/L_0) \sin^2 \omega_q \xi].$$