Краткие сообщения по физике № 10-1990 г.

УДК 539.17

ОБ УЧЕТЕ КУЛОНОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В МЕТОДЕ ЭЙКОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ

В.И. Беляк

Предложено обобщение метода эйконального разложения в оптической модели ядра, в котором фазы рассеяния разлагаются по оптическому потенциалу, а кулоновский потенциал учитывается квазиклассически. С учетом двух обобщенных неэйкональных поправок вычисляется сечение реакций заряженных частиц (адронов, ядер) с ядрами в случае наличия сильного поглощения.

Обобщение метода эйконального разложения в оптической модели ядра на основе идеи о квазиклассическом учете в нем кулоновского взаимодействия начато в /1/, где получено выражение для первого члена обобщенного эйконального разложения фаз рассеяния. В настоящей работе получены выражения для последующих членов этого обобщенного разложения и приведено выражение для сечения реакций (сечения поглощения), соответствующее обобщенному методу, что позволяет отказаться от требований малости кулоновского взаимодействия. В случае сильного поглощения, когда основную роль играют "хвосты" оптических потенциалов /2, 3/, обобщенный метод применен для вычисления сечения реакций адронов и ядер с ядрами.

Рассеяние описываем уравнением $[\nabla^2 + k^2(1 - u(r))]\psi(\mathbf{r}) = 0$, где k – волновое число падающих частиц, $u(r)$ – безразмерный потенциал, связанный с кулоновским $U_c(r)$ и оптическим $U_{op}(r)$ потенциалами. В случае уравнения Клейна – Гордона – Фока и скалярности $U_{op}(r)$ имеем:

$$u(r) = u_c(r) + u_{op}(r),\ u_c(r) = U_c(r)\,[(1 + E/\mu) - U_c(r)/2\mu]/E',$$

$$u_{op}(r) = U_{op}(r)\,[1 + U_{op}(r)/2\mu]/E',\ E' \equiv E(1 + E/2\mu) = \hbar^2k^2/2m,\ \ \mu \equiv mc^2.$$

Сечения рассеяния рассматриваем, исходя из разложений по парциальным волнам, характеризуемых матрицей рассеяния $S_l = \exp(2i\delta_l)$ (δ_l – фаза рассеяния l-ой парциальной волны). В частности, сечение поглощения вычисляем, исходя из разложения $\sigma_a = (2\pi/k^2)\sum\limits_{l=0}^{\infty}(l + 1/2)(1 - |S_l|^2)$. Переходя от суммирования к интегрированию по формуле Эйлера – Маклорена и вводя прицельное расстояние $b = (l + 1/2)/k$ вместо l, получим

$$\sigma_a = 2\pi\int\limits_0^\infty dbb\,[1 - S_a(b)] + \Delta\sigma_a^{EM},\ \ S_a(b) = \exp[-4\,\mathrm{Im}\,\delta(b)],\ \ \delta(b) \equiv \delta_l,$$

$$\Delta\sigma_a^{EM} = -\frac{2\pi}{k^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(1/2)\,(2n-1)}{(2n)!}\left[\delta_{n1} - \frac{S^{(2n-2)}(0)}{k^{2n-2}}\right] = \frac{\pi}{12k^2}\left\{[1 - S_a(0)] + \ldots\right\}. \qquad (1)$$

Фазы $\delta(b)$ вычисляем, разлагая их квазиклассические выражения (с учетом высших приближений) по степеням "силы" $\bar{u}$ оптического потенциала ($u_{op}(r) \propto \bar{u}$). При этом фазы рассеяния $\delta_c(b)$ на кулоновском потенциале $u_c(r)$ вычисляются квазиклассически или являются известными, как в случае точечного кулоновского потенциала. В сдвигах фаз $\bar{\delta}(b) = \delta(b) - \delta_c(b)$ относительно $\delta_c(b)$ кулоновский потенциал объединяется с центробежной энергией и учитывается квазиклассически. В результате получим:

$$\delta(b) = \delta_c(b) + \bar{\delta}(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-1}^{\infty} \delta(b)^{(n)}_m, \quad \delta(b)^{(n)}_m \propto \frac{k\bar{u}^{1+m}}{k^{2n-2}}, \quad \delta_c(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(b)^{(n)}_{-1},$$

$$\bar{\delta}(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\delta}(b)^{(n)}, \quad \bar{\delta}(b)^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{\delta}(b)^{(n)}_m, \quad \bar{\delta}(b)^{(n)}_m = \delta(b)^{(n)}_m \ (m \geqslant 0), \tag{2}$$

$$\bar{\delta}(b)^{(1)}_m = -\frac{k}{4} \frac{1}{(m+1)!} \int_{s_c}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s - v_c(s) - b^2}} \hat{D}^m(s) \frac{v_{op}^{m+1}(s)}{s}, \quad \hat{D}(s) \equiv \frac{d}{ds} \frac{1}{1 - v_c'(s)},$$

$$\bar{\delta}(b)^{(2)}_m = \frac{1}{12k} \frac{1}{m!} \int_{s_c}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s - v_c(s) - b^2}} \hat{D}^{m+1}(s) \left[v_{op}''(s) + \frac{1}{m+1} \hat{D}(s) v_c''(s) v_{op}(s)\right] s v_{op}^m(s),$$

$s \equiv r^2$, $v_{c,op}(s) \equiv u_{c,op}(r) r^2$, $s_c - v_c(s_c) - b^2 = 0$, $s_c = b_c^2$, $1 - u_c(b_c) - b^2/b_c^2 = 0$, b_c – точка поворота для суммы центробежного и кулоновского потенциала. При вычислении σ_a вещественные величины $\delta_c(b)$ не играют роли и задача сводится к вычислению $\bar{\delta}(b)$. Разложение (2) имеет общий характер и не зависит от конкретного вида $u_c(r)$ и $u_{op}(r)$. Практически (2) представляет интерес, когда не возникает существенных трудностей из-за наличия $\delta_c(b)$ и появления $u_c(r)$ в подынтегральных выражениях $\bar{\delta}(b)$. Соответственно при учете распределения заряда бывает удобно использовать в (2) разбиение $u(r)$, в котором $u_c(r)$ порождается соответствующим точечным кулоновским потенциалом, а поправки от учета распределения заряда включаются в $u_{op}(r)$ /1/. Выражения для $\bar{\delta}(b)^{(n)}_m$ можно также представить в виде интегралов по переменной r, криволинейных интегралов по классической траектории L частицы с прицельным расстоянием b в кулоновском поле $u_c(r)$, интегралов, у которых длина этой траектории является переменной интегрирования. В частности, в основном приближении имеем:

$$\bar{\delta}(b) \approx \bar{\delta}(b)^{(1)}_0 = -\frac{k}{2} \int_{b_c}^{\infty} \frac{dr\, u_{op}(r)}{\sqrt{1 - u_c(r) - b^2/r^2}} = -\frac{k}{4} \int_L \frac{u_{op}(r)\, dl}{\sqrt{1 - u_c(r)}} = \tag{3}$$

$$= -\frac{k}{2} \int_0^{\infty} \frac{dl\, u_{op}(r)}{\sqrt{1 - u_c(r)}}, \quad l = l(r) \equiv \int_{b_c}^{r} dr \sqrt{[1 - u_c(r)]/[1 - u_c(r) - b^2/r^2]}.$$

Выражение $2\hbar\bar{\delta}(b)^{(1)}_0$ (3) является первым членом разложения по степеням $\bar{u}$ изменения действия $\hbar k \int_L dl \times [\sqrt{1 - u_c(r) - u_{op}(r)} - \sqrt{1 - u_c(r)}]$, обусловленного полем $u_{op}(r)$, при пролетании частицы вдоль классической траектории в поле $u_c(r)$. Соответственно приближение $\bar{\delta}(b) \approx \bar{\delta}(b)^{(1)}_0$ можно называть эйкональным /4/ или обобщенно эйкональным, а разложение (2) – обобщенным эйкональным разложением. В (2) явно выписаны разложения $\bar{\delta}(b)^{(1)}$ – сдвига фаз в первом квазиклассическом приближении и $\bar{\delta}(b)^{(2)}$ – поправки от учета второго квазиклассического приближения. Этого достаточно для рассмотрения задачи рассеяния в рамках учета трех неэйкональных поправок. При вычислении σ_a будем учитывать две такие поправки. Для этого следует рассмотреть члены разложения (2) для $\bar{\delta}(b)$ с $n = 1$, $m = 0, 1, 2$; $n = 2$, $m = 0$ и основной член разложения (1) для $\Delta\sigma_a^{EM}$ с $n = 1$.

Обобщенное эйкональное разложение фаз рассеяния (2) с использованием разложений полиномов Лежандра и формул суммирования для сечений рассеяния приводит к обобщенным эйкональным разложениям этих сечений. Разложение (2) в сочетании с выражением (1) для сечения поглощения σ_a приводит к обобщенному разложению σ_a, соответствующему варианту метода эйконального разложения, предложенному в /3/. При использовании варианта Уоллеса /5/ σ_a следует представить в виде:

$$\sigma_a = 2\pi \int_0^\infty db\, b\, [1 - S_{Fa}(b)], \quad S_{Fa}(b) = \sum_{n=0}^{\infty} b^{-1} \frac{1}{(2n)!} b_n\left(-\frac{b}{2}\frac{d}{db}\right)\left(\frac{1}{k}\frac{d}{db}\right)^{2n} b S_a(b) =$$
$$= [1 + (1/24k^2)(d/db)^3 b + \ldots] S_a(b), \quad b_n(x) \equiv B_{2n}^{(2x)}(x), \quad b_0(x) = 1, \quad b_1(x) = -x/6, \tag{4}$$

$B_k^{(a)}(x)$ – обобщенные многочлены Бернулли. Функция $S_{Fa}(b)$ отличается от функции рассеяния $S_F(b)$, входящей в амплитуду рассеяния $f(\theta)$ в методе Уоллеса, заменой $2i\delta(b)$ на $-4\,\mathrm{Im}\,\delta(b)$, причем $S_{Fa}(b) \neq |S_F(b)|^2$. Использование для $\delta(b)$ в $S_a(b)$ (4) разложения (2) приводит к обобщенному разложению σ_a, соответствующему варианту Уоллеса. Разложение (4) эквивалентно (1), причем вклады n-ых членов разложений (4) и (1) равны.

Перейдем к вычислению σ_a при наличии сильного краевого поглощения /2, 3/. Полагаем, что в области существенных краевых $r > R$ оптический потенциал $U_{op}(r)$ и соответственно $u_{op}(r)$ разлагаются в ряд по степеням экспоненты, а кулоновский потенциал сводится к точечному:

$$U_c(r) = \frac{Z_0 Z_1 e^2}{r}, \quad u_{op}(r) = -\bar{u} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} A_n \exp\left(-n\frac{r-R}{a}\right), \quad A_1 = 1, \quad |A_n| \lesssim 1, \quad \frac{a}{R} \ll 1,$$
$$u_c(r) = u_{co}(r) - (r_c^2 - \bar{r}_c^2)/r^2, \quad u_{co}(r) \equiv 2r_c/r, \quad \bar{r}_c \equiv r_c/(1 + E/\mu) = (Z_0 Z_1/137)\sqrt{\mu 2E}/k. \tag{5}$$

Для потенциала Вудса – Саксона в нерелятивистском случае $A_n = 1$. Выражения для $\mathrm{Im}\,\delta(b)$ $(b_c > R)$ получим, используя (2) для $\delta(b)$ в рамках учета двух неэйкональных поправок и разложение (5) для $u_{op}(r)$ с учетом трех членов:

$$4\delta_I(b) = \tau(b_c)\,[1 + \omega_0(b_c) + \omega_1(b_c)\tau(b_c) + \omega_2(b_c)\tau^2(b_c)], \quad b_c = \sqrt{b^2 + \bar{r}_c^2} + r_c,$$
$$\tau(b) \equiv \sqrt{2}\,\bar{q}_I(b)\,[1 + (a/8b)(3 - 4r_c/b)/(1 - r_c/b)]\exp[-(b - R)/a], \quad \omega_0(b) \equiv (\pi/6)\bar{\eta}^2(b), \tag{6}$$
$$\omega_1(b) \equiv -A_2/2\bar{q}_I(b) + \tilde{\xi}\bar{\eta}(b), \quad \omega_2(b) \equiv \sqrt{3}\,[A_3/6\bar{q}_I^2(b) - A_2\tilde{\xi}\bar{\eta}(b)/\bar{q}_I(b) - \bar{\eta}^2(b)(1 - 3\tilde{\xi}^2)/4],$$
$$\tilde{\xi} \equiv \bar{u}_R/\bar{u}_I, \quad \bar{q}_I(b) \equiv q_I(b)/\sqrt{1 - u_{co}(b)/2}, \quad \bar{\eta}(b) \equiv \eta(b)/\sqrt{1 - u_{co}(b)/2},$$
$$q(b) \equiv k\bar{u}\sqrt{\pi a b}, \quad \eta(b) \equiv (1/2ka)\sqrt{b/\pi a}, \quad f_R \equiv \mathrm{Re}\,f, \quad f_I \equiv \mathrm{Im}\,f.$$

Здесь A_n для простоты считаются вещественными, величины $\sim a/b_c \lesssim a/R$ учитываются в $\tau(b_c)$ и не учитываются в поправках $\propto \omega(b_c)$. Неэйкональные поправки $\bar{\delta}_I(b)^{(1)}_{1;2}$ и $\bar{\delta}_I(b)^{(2)}_0$ (последняя от учета второго квазиклассического приближения) дают в $\delta_I(b)$ (6) вклады $\sim [u_{op}(b_c)_R b_c/a]^{1;2} \sim [\tilde{\xi}\,\eta(b_c)\tau(b_c)]^{1;2}$, $[u_{op}(b_c)_I b_c/a]^2 \sim [\eta(b_c)\tau(b_c)]^2$ и $\eta^2(b_c)$. В существенной для σ_a области интегрирования (в случае $u_c(R) < 1$) имеем $\tau(b_c) \sim 1$, $b_c \sim R$. Соответственно параметром эйконального разложения σ_a становится квазиклассический параметр $\eta(R)$ и $\tilde{\xi}\,\eta(R)$. Такой характер параметра эйконального разложения объясняется "выталкиванием" области эффективного взаимодействия (поглощения) на прицельные расстояния, при которых свободный пробег сравнивается с пробегом в области действия потенциала. Аналогично параметром, соответствующим разложению $u_{op}(r)$ (5), становится $1/q_I(R)$. В (6) и далее в (7) выписываем величины, квадратичные по этим параметрам.

В случае $u_c(R) \approx U_c(R)/E < 1$ (энергия частиц больше кулоновского потенциала в краевой области $r > R$) выражение для σ_a с учетом величин $\sim (a/R)^2$, $(a/R)\,[1/q_I(R) + \eta(R)]^2$ можно представить (на основе (1), (6)) в виде:

$$\sigma_a = \pi(R^c_a)^2\,[1 - u_c(R^c_a)], \quad R^c_a = R^0_a + \Delta R^c_a + \Delta R^\omega_a, \quad R^0_a = b_a + \bar{a}\gamma + (a^2/b_a)(\pi^2/12 + 3/8),$$

$$b_a = b_{1a} + (\bar{a}/2)\ln(b_{1a}/R), \quad \bar{a} = a(1 + a/2b_{1a}), \quad b_{1a} = R + a\ln(\sqrt{2}\,q_I(R)),$$

$$\Delta R^c_a = -(\bar{a}/2)\ln(1 - r_c/R^0_a) + (a^2/4R^0_a)\,[r_c/(R^0_a - r_c)]\,[\pi^2/3 - 1/2 + \ln(1 - r_c/R^0_a)], \tag{7}$$

$$\Delta R^\omega_a = [-A_2/2\bar{q}_I + \tilde{\xi}\bar{\eta} - (3A_2^2 - 4A_3/\sqrt{3})/4\bar{q}_I^2 - (\nu' + \nu''\tilde{\xi}^2)\bar{\eta}^2 - (2\sqrt{3} - 3)A_2\tilde{\xi}\bar{\eta}/\bar{q}_I],$$

$$\bar{q}_I \equiv \bar{q}_I(b_a), \quad \bar{\eta} \equiv \bar{\eta}(b_a), \quad \nu' = \sqrt{3}/2 - \pi/6, \quad \nu'' = 3 - 3\sqrt{3}/2, \quad \gamma = 0{,}5772.$$

Учет кулоновского взаимодействия приводит в неэйкональных поправках, входящих в радиус R^c_a, к замене $\eta(b_a)$ на $\bar{\eta}(b_a) = \eta(b_a)/\sqrt{1 - u_{co}(b_a)/2}$. В /1/ в неэйкональных поправках (пропорциональных $\eta(b_a)$) учитывались только линейные по $u_{co}(b_a)$ величины, но наряду с этим предполагалось, что к более точной зависимости этих поправок от $u_{co}(b_a)$ приведет замена $\eta(b_a)$ на $\bar{\eta}(b_a)$ в R^c_a. Формулы (7) настоящей работы доказывают правильность этого предположения.

Для оценки параметров задачи можно воспользоваться соотношениями (нерелятивистскими, коэффициенты в левой части которых взяты с учетом отношения поправок второго и первого порядка для σ_a в случае потенциала Вудса – Саксона с $\tilde{\xi} > 1$)

$$0{,}4\tilde{\xi}\,\eta(R) \approx \widetilde{\xi\bar{A}}^{1/6}(1 + A_0/A_1)/\sqrt{E_0 A_0}, \quad 1/2{,}9q_I(R) \approx \sqrt{E_0/A_0}/\bar{U}_I\bar{A}^{1/6}. \tag{8}$$

Здесь E_0 – энергия падающих частиц в МэВ, $\bar{U}_I = \bar{u}_I E$ – величина мнимой части потенциала в МэВ, A_0 и A_1 – атомные номера падающих и рассеивающих частиц, $\bar{A}^{1/3} \equiv A_1^{1/3} + A_0^{1/3}$. (Для оценки использовались константы $a = 0{,}65$ фм, $r_0 = 1{,}2$ фм; $\bar{R} = r_0\bar{A}^{1/3}$.) Вклады поправок в области $[1 - U_c(R)/E] \sim 1$ уменьшены по сравнению с параметрами (8) наличием множителя $\sim 4a/R \approx 2\bar{A}^{-1/3}$.

Полученные выражения для сечения реакций (сечения поглощения) применимы при анализе взаимодействия адронов (антинуклонов, мезонов) средней энергии и ядер, включая тяжелые ионы, с ядрами.

Автор благодарит Г.М. Ваградова и Д.А. Заикина за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляк В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 11, 38 (1989); № 3, 43 (1990).
2. Johnson M. B., Bethe H. A. Comments Nucl. Part. Phys., 8, 75 (1978). Germond J. F., Johnson M. B. Phys. Rev., C22, 1622 (1980).
3. Беляк В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 12, 43 (1986); № 5, 3 (1987); № 4, 15 (1988); Изв. АН СССР, сер. физ., 53, 991 (1989).
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика, М., Наука, 1989, с. 625.
5. Wallace S. J. Phys. Rev., D8, 1846 (1973).

Институт ядерных исследований АН СССР

Поступила в редакцию 30 июля 1990 г.