*Краткие сообщения по физике № 11-1990 г.*

УДК 621.391

# СПЕКТР СЛУЧАЙНО ДИСКРЕТИЗОВАННОГО СИГНАЛА

П.В. Григорьев

*Рассчитано преобразование спектра стационарного случайного процесса при независимой стохастической дискретизации.*

Проблема восстановления характеристик случайно дискретизованного сигнала, возникающая при анализе нерегулярного потока данных /1, 2/, близка к задаче о случайных импульсах, поставленной и решенной в работе /3/. Отличие состоит в наличии статистической зависимости амплитуд импульсов, в роли которых в случае стохастической дискретизации выступают значения исходного случайного процесса $\xi(t)$ в моменты дискретизации $t_i$. Как показано ниже, метод прямого расчета спектра, предложенный в /3/, позволяет решить задачу о преобразовании спектра стационарного случайного процесса при стохастической дискретизации.

Пусть дискретизация осуществляется импульсами случайной длительности и постоянной формы:

$$\eta(t) = \sum_i \xi(t_i) F\left(\frac{t - t_i}{\theta_i(\tau_i)}\right).$$

Интервалы дискретизации $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ предполагаются независимыми одинаково распределенными величинами; $\eta(t)$ – процесс, получающийся в результате дискретизации, $F(x)$ – форма дискретизующего импульса, $\theta_i$ – случайная длительность импульса, которая может зависеть от $\tau_i$. При $i \neq j$ параметры $\theta_i$ и $\theta_j$ независимы.

Аналогично работе /3/ для спектра мощности процесса $\eta$ получаем выражение:

$$S_\eta(\omega) = \lim_{T\to\infty} \left\langle \frac{2\pi}{T} \sum_{\nu,\mu=1}^{n} R_\xi(t_\mu - t_\nu) f^*(\omega\theta_\mu) f(\omega\theta_\nu) \times \right. \tag{1}$$

$$\left. \times e^{i\omega(t_\mu - t_\nu)} \theta_\nu \theta_\mu \right\rangle,$$

где $R_\xi$ – корреляционная функция процесса $\xi$, $n$ – число точек дискретизации на интервале $(0, T)$, $f(\omega) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{-i\omega x} dx$, $\langle ... \rangle$ означает усреднение по ансамблю; комплексное сопряжение обозначено звездочкой. Усреднение сигнала производится по величинам $\theta$ и $\tau$, а затем по $n$. При больших $T$ распределение величины $n$ нормализуется /4/, поэтому усреднение по $n$ сводится к замене величин вида $n/T$ на $1/\langle\tau\rangle$. В дальнейшем усреднение по $n$ будем подразумевать и обозначать угловыми скобками только усреднение по $\theta$ и $\tau$.

Суммирование по индексам $\mu = \nu$ в (1) дает

$$S_\eta(\omega) = \frac{2\pi\langle\xi^2\rangle\langle|f(\omega\theta)\theta|^2\rangle}{\langle\tau\rangle} + \lim_{T\to\infty} \frac{4\pi}{T} \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{n-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{n} S_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где Re означает действительную часть, $S_{\mu\nu} = \langle R_\xi(\tau_\nu + \tau_{\nu+1} + ... + \tau_{\mu-1}) f(\omega\theta_\nu) f^*(\omega\theta_\mu)\theta_\nu\theta_\mu e^{i\omega(\tau_\nu + \tau_{\nu+1} + ... + \tau_{\mu-1})}\rangle$. Введем обозначение $G(\omega_1; \omega) = \int_0^\infty f(\theta(\tau)\omega)\theta(\tau) e^{i(\omega-\omega_1)\tau} p(\tau) d\tau$, где $p(\tau)$ – распределение величины $\tau$. Применяя теорему Парсеваля, преобразуем выражение для $S_{\mu\nu}$ в (2), учитывая, что оно представляет собой $\mu - \nu - 1$ — кратную свертку:

$$S_{\mu\nu} = \langle f^* (\theta(\tau_\mu)\omega)\, \theta(\tau_\mu)\rangle \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_1;\omega)\, S_\xi(\omega_1)\, \varphi^{\mu-\nu-1}(\omega-\omega_1)\, d\omega_1, \tag{3}$$

где $\varphi(\omega)$ – характеристическая функция случайной величины $\tau$. Суммирование по $\mu$ и $\nu$ дает под знаком интеграла величину $(n-1)/[1-\varphi(\omega-\omega_1)+2/n+\epsilon]$, где $\epsilon \to 0$ при $\omega \to \omega_1$, которая при $n \to \infty$ стремится к пределу /5/

$$\frac{n-1}{1-\varphi(\omega-\omega_1)} + \frac{\pi}{\langle\tau\rangle}\, \delta(\omega-\omega_1)(n-1).$$

Если $\varphi(\omega_k)$ обращается в единицу при $\omega_k \neq 0$, $(k = 1; 2 \ldots)$, то появятся также сингулярности вида $i\pi\delta(\omega-\omega_k-\omega_1)/\varphi'_\omega(\omega_k)$.

Окончательно для $S_\eta(\omega)$ (2) получаем следующее выражение:

$$S_\eta(\omega) = \frac{2\pi\langle\xi^2\rangle\langle|f(\omega\theta)\theta|^2\rangle}{\langle\tau\rangle} + \frac{4\pi}{\langle\tau\rangle}\, \mathrm{Re}\,\Big(\frac{\pi}{\langle\tau\rangle} S_\xi(\omega) \times$$

$$\times |\langle f(\omega\theta)\theta\rangle|^2 + \langle f^*(\omega\theta)\theta\rangle \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega_1;\omega) \frac{S_\xi(\omega_1)\, d\omega_1}{1-\varphi(\omega-\omega_1)} + \tag{4}$$

$$+ \sum_k \langle f^*(\omega\theta)\theta\rangle\, G(\omega-\omega_k;\omega_1)\, S_\xi(\omega-\omega_k) \frac{i\pi}{\varphi'_\omega(\omega_k)}\Big),$$

определяющее преобразование спектра стационарного случайного процесса при стохастической дискретизации. Оно включает в себя шумовой член, пропорциональный дисперсии исходного процесса, сигнальную часть, эквивалентную результату линейной фильтрации, и смешанную часть, представляющую собой интегральное преобразование исходного спектра. Последний член описывает эффект наложения частот при наличии регулярной составляющей в потоке дискретизующих импульсов. Действительно, в случае строго периодической дискретизации импульсами постоянной длительности $\theta_0$ имеем:

$$G(\omega_1;\omega) = \langle\theta f(\omega\theta)\rangle \varphi(\omega-\omega_1),$$

$$f(\omega\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad \mathrm{Re}\, \frac{\varphi(\omega-\omega_1)}{1-\varphi(\omega-\omega_1)} = -\frac{1}{2}.$$

Первый член формулы (4) сокращается с третьим и получается известное соотношение /6/

$$S_\eta(\omega) = (\theta_0/\tau_0)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega - 2\pi k/\tau_0),$$

где $\tau_0$ – период дискретизации.

Второй важный частный случай формулы (4) – дискретизация с запоминанием. При этом $\theta_i = \tau_i$; $F(x) = 1$ при $0 < x \leqslant 1$ и $F(x) = 0$ при $x > 1$ или $x \leqslant 0$. Тогда

$$G(\omega_1;\omega) = (1/2\pi i\omega)(\varphi(\omega-\omega_1) - \varphi^*(\omega_1)),$$

$$S_\eta(\omega) = S_\xi(\omega) \frac{|1-\varphi(\omega)|^2}{\omega^2\langle\tau\rangle^2} + \frac{1}{\pi\omega^2\langle\tau\rangle} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_\xi(\omega_1)\, \mathrm{Re}\, \frac{(1-\varphi(\omega))(1-\varphi^*(\omega_1))}{1-\varphi(\omega-\omega_1)}\, d\omega_1 +$$

$$+ \frac{1}{\pi\omega^2\langle\tau\rangle} \sum_k \frac{i\pi}{\varphi'_\omega(\omega_k)} S_\xi(\omega-\omega_k)\, \mathrm{Re}\,((1-\varphi(\omega))(1-\varphi(\omega_k-\omega))).$$

Для пуассоновской последовательности дискретизующих импульсов:

$$\varphi(\omega) = 1/(1 - i\omega\langle\tau\rangle),$$

$$S_\eta(\omega) = \frac{1}{1 + (\omega\langle\tau\rangle)^2}\left(S_\xi(\omega) + \frac{\langle\tau\rangle^3}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{S_\xi(\omega_1)\,\omega_1^2\,d\omega_1}{1 + (\omega_1\langle\tau\rangle)^2}\right).$$

Этот результат также известен по работе /1/.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Boyer L., Searby G. J. Appl. Phys., **60**, 2699 (1986).
2. Григорьев П.В., Солнцев М.В. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, 27 (1988).
3. Хургин Я.И. Научн. докл. высш. школы (Радиотехника и электроника), **1**, 96 (1958).
4. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М., Сов. радио, 1977.
5. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними, вып. 1. М., ГИФМЛ, 1959.
6. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций, Л., Гидрометеоиздат, 1981.



Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 7 сентября 1990 г.