

НЕЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗАННЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ ПЬЕЗОПОЛУПРОВОДНИКОВ

Р.Д. Джамалов, А.М. Игнатов

Рассматривается нелинейная динамика акустических волн с учетом слабой пьезосвязи с плазменной подсистемой. Получены решения в виде акустических несимметричных солитонов, амплитуда которых ограничена.

В работе /1/ определены спектры связанных волн, распространяющихся в пьезополупроводниках. Эти волны представляют собой результат линейного взаимодействия обычного звука кристаллической решетки и дырочного звука электронно-дырочной плазмы пьезополупроводника. Необходимым условием существования дырочного звука является превышение тепловой скорости электронов над тепловой скоростью дырок /2, 3/.

Имея в виду, для определенности, случай невырожденных полупроводников и считая, что характерные фазовые скорости малы по сравнению с тепловой скоростью электронов, исходную систему уравнений запишем в виде:

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \beta E \right], \\ \dot{n}_h + \frac{\partial}{\partial x} (n_h v_h) &= 0, \\ \dot{v}_h + v_h \frac{\partial v_h}{\partial x} &= - \frac{e}{m_h} E, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(E + 4\pi\beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 4\pi e (n_e - n_h), \\ T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} &= en_e E. \end{aligned} \quad (1)$$

В линейном приближении из системы уравнений (1) следует спектр частот /1/:

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{1}{2} k^2 \left\{ u_s^2 + v_s^2 (1 + \xi_0^2) \pm W \right\}, \\ W^2 &= (u_s^2 - v_s^2)^2 + 2 \xi_0^2 (u_s^2 + v_s^2 (\xi_0^2 + 1)) v_s^2. \end{aligned} \quad (2)$$

В выражении (2) $v_s = (\lambda/\rho_0)^{1/2}$ – скорость звука в кристаллической решетке в выбранном направлении; $u_s(k) = c_s (1 + k^2 r_D^2)^{-1/2}$, $c_s = (T_e/m_h)^{1/2}$ – скорость дырочного звука; $\xi_0 = (4\pi\beta^2/\rho_0 v_s^2)^{1/2}$ – константа электромеханической связи; $r_D = (T_e/4\pi e^2 n_0)^{1/2}$ – электронный дебаевский радиус; $n_0 = n_{h0} = n_{e0}$ – равновесная концентрация собственных полупроводников. Для простоты рассматривается случай, когда только одна компонента вектора смещения $u(x, t)$ отлична от нуля.

Из (2) следует, что когда скорость акустического звука близка к скорости дырочного звука, но вместе с тем расстройка достаточно велика, так что $(v_s^2 - c_s^2)^2/v_s^2 (v_s^2 + c_s^2) > \xi_0^2$, имеется два значения частоты связанной волны, соответствующие акустической ветви колебаний и ветви дырочного звука. Если, кроме того, $k^2 r_D^2 \ll 1$, то для акустической ветви получаем:

$$\omega(k) = kv_s [1 + \xi_0^2 k^2 r_D^2 v_s^2 / 2(v_s^2 - c_s^2)]. \quad (3)$$

Дисперсия в (3) обусловлена электронно-дырочной плазмой полупроводника. Вторая ветвь колебаний (2) в длинноволновом пределе соответствует дырочному звуку, при этом влияние пьезоэффекта приводит лишь к незначительному изменению дисперсии.

Поскольку акустические волны оказываются диспергирующими с характерным масштабом дисперсии $q_0 = (2|v_s^2 - c_s^2|)^{1/2} / \xi_0 v_s r_D \gg 1/r_D$, появляется возможность формирования слабонелинейных стационарных волн. Для вывода укороченного уравнения, описывающего динамику подобных волн, в линейном приближении для акустической ветви колебаний (3) фурье-компоненты всех величин, входящих в исходные уравнения (1), выражаем через одну из них, например, $u(\omega, k)$. Влияние нелинейности учитываем по теории возмущений, при этом в нелинейных членах дисперсией пренебрегаем. Полученное укороченное уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial g}{\partial \tau} = \tau \frac{\partial^3 g}{\partial \xi^3} - \frac{\partial g^2}{\partial \xi} - \frac{\sigma \mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial g}{\partial \xi} \right)^2. \quad (4)$$

Здесь $\tau = q_0 v_s t$; $\xi = q_0 (x - v_s t)$; величина $\sigma = \text{sgn}(v_s - c_s)$ определяет знак дисперсии; $\mu = (2\lambda / n_0 T_e)^{1/2} (v_s \rho_0 / \lambda_1) (3c_s^4 - v_s^4) |v_s^2 - c_s^2|^{-3/2}$. В выбранном масштабе $g(\xi, \tau) = (\lambda_1 / 2\rho_0 v_s^2) \partial u(x, t) / \partial x$ и все производные этой величины малы по сравнению с единицей, а все остальные величины выражаются через $g(\xi, \tau)$. Например, возмущение плотности электронов $\delta n_e \sim \partial g(\xi, \tau) / \partial \xi$. Происхождение второго члена в (4) $\partial g^2 / \partial \xi$ связано с акустическим ангармонизмом в уравнениях (1), тогда как последний член в (4) описывает влияние гидродинамической и концентрационной нелинейностей в электронно-дырочной подсистеме на динамику акустического поля. На первый взгляд, учет этого последнего члена является превышением точности разложения, которое проводится по параметру $g^{1/2} \sim \partial / \partial \xi \sim 1/Lq_0 \ll 1$, где L — характерная длина волн. В действительности для реальных материалов параметр μ велик ($|\mu| \approx 10^4 - 10^5$), поэтому область характерных масштабов, для которых последний член в (4) порядка двух первых ($Lq_0 \approx \mu^{1/3}$), находится в рамках применимости теории возмущений. Для очень длинных волн с $Lq_0 \gg \mu^{1/3}$ последним членом можно пренебречь, и уравнение (4) превращается в уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ), которое обычно используется для исследования динамики слабонелинейных диспергирующих волн [4].

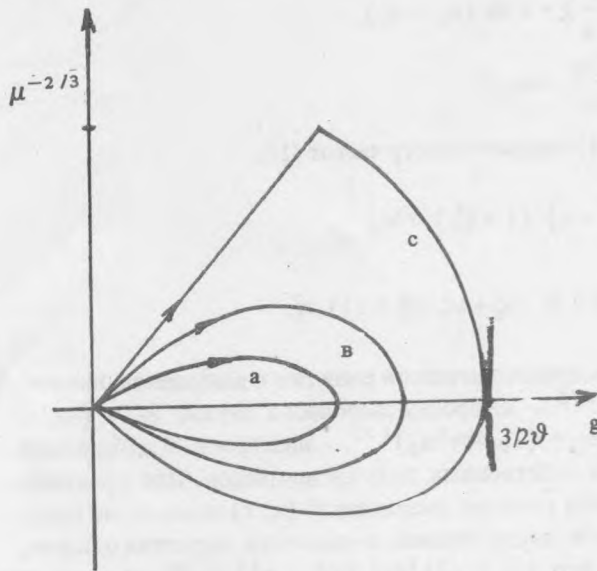


Рис. 1. Фазовый портрет уравнения (5).

Рассмотрим структуру стационарных решений (4) типа уединенных волн. Пусть $g(\xi, \tau) = g(\xi - \vartheta\tau)$ и $|g| \xrightarrow{\xi \rightarrow \pm \infty} 0$, тогда (4) можно один раз проинтегрировать и свести его к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$d^2 g/d\xi^2 = \sigma(g^2 - \vartheta g) + \mu/2 \partial(\partial g/\partial \xi)^2/\partial \xi. \quad (5)$$

Солитон КдФ существует при условии $\sigma\vartheta < 0$, которое будет предполагаться выполненным. Первый интеграл уравнения (5) имеет вид:

$$K = p^2/2 - \mu p^3/3 + \sigma(\vartheta g^2/2 - g^3/3), \quad (6)$$

где $p(\xi) = \partial g/\partial \xi$, причем для солитона $K = 0$. Используя интеграл (6), легко построить фазовый портрет уравнения (5), который изображен на рис. 1 (для определенности полагаем, что $\vartheta > 0$ и $\mu > 0$). При достаточно малой скорости (что соответствует большому размеру) $\vartheta \ll \mu^{-2/3}$, кривая а на рисунке описывает фактически обычный солитон КдФ. Однако по мере увеличения скорости и амплитуды ($g_{\max} = 3\vartheta/2$) и уменьшения размера солитона становится существенным дополнительный, пропорциональный μ член в (6). Солитон при этом меняет форму, становится асимметричным (кривая б). Наконец, когда величина ϑ достигает значения $\vartheta_0 = \mu^{-2/3}$, на зависимости $p(g)$ появляется излом (кривая с). Солитонов с большими скоростями и амплитудами не существует.

Уравнение (5) интегрируется в квадратурах, однако явные решения получить не удастся. Отметим, что если отсчитывать координату ξ от точки максимума $g(\xi)$, то для предельного солитона с $\vartheta = \vartheta_0$ точка излома $\xi = \xi_1 = -0,4461/\vartheta_0^{-1/2}$, причем при $\xi < \xi_1$ $g(\xi) = \vartheta_0 \exp[\vartheta_0^{1/2}(\xi - \xi_1)]$, что соответствует прямолинейному участку кривой с на рис. 1. Излом функции $p(\xi) = g'(\xi)$ соответствует скачку производных p_e, p_n и v_n , при этом, в силу уравнений (1), электрическое поле в точке ξ_1 имеет скачок, то есть в электронно-дырочной подсистеме создается некоторое подобие ударной волны. Разумеется, непосредственно в окрестности точки излома использованное разложение неприменимо, и мы можем говорить лишь о тенденции к образованию подобных структур.

Таким образом, возникает довольно своеобразная, с точки зрения теории нелинейных волн, ситуация. Обычно формирование стационарных нелинейных волн, солитонов, например, связано с балансом между дисперсией и нелинейностью, т.е. первыми двумя членами в правой части уравнения (4). Если бы величина μ в (4) была порядка единицы, последний член следовало бы учитывать наряду с аналогичными дисперсионными членами в высших порядках теории возмущений. Однако, поскольку $\mu \gg 1$, во втором порядке теории возмущений возникает дисбаланс между дисперсией и нелинейностью. В результате возникает описанная выше структура, которую можно назвать ударной волной второго порядка. В конечном счете причина этого заключается в известном факте — электронно-дырочная подсистема существенно более нелинейна, чем решеточная.

Авторы благодарны профессору А.А. Рухадзе за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Джамалов Р.Д., Рухадзе А.А. Материалы III Всесоюзного симпозиума по квантовой акустике. Ташкент, 1978, с. 273.
2. Аронзон Б.А., Мейлихов Е.З. ФТП, 7, 679 (1973).
3. Конуэлл Э. Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях. М., Наука, 1970.
4. Теория солитонов: Метод обратной задачи. Под ред. Новикова С.П. М., Наука, 1980.