Краткие сообщения по физике № 1-1989 г.

УДК 537. 63

СИЛЬНАЯ КВАНТОВО - МЕХАНИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАКРОСКОПИЧЕСКОГО ТЕЛА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

В.П. Быков

В приближении малости волнового пакета квантово-механическое уравнение, описывающее движение макроскопического тела по орбите в гравитационном поле, допускает стационарное решение. Вычислены размеры волнового пакета, соответствующего этому решению, и показана его сильная неустойчивость.

Движение материальной точки массы m в потенциальном поле $U(\mathbf{r})$ описывается гамильтонианом $H = p^2/2m + U(\mathbf{r})$. Приближенное решение уравнения Шредингера

$$i\hbar\,\partial\Psi(\mathbf{r},t)/\partial t = [-(\hbar^2/2m)\,\mathrm{div\,grad}_{\mathbf{r}} + U(\mathbf{r})]\,\Psi(\mathbf{r},t), \tag{1}$$

соответствующее такому движению, представляет собой волновой пакет вида

$$\Psi(\mathbf{r},t) = G(t)\exp[-(\vec{\rho}\,F\vec{\rho}\,) + \frac{i}{\hbar}\,\mathbf{p}_0(t)\vec{\rho} + \frac{i}{\hbar}E(t)], \tag{2}$$

где $\vec{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{p}_0(t)$ подчиняются классическим гамильтоновым уравнениям движения : $\dot{\mathbf{r}}_0 = \mathbf{p}_0/m$, $\dot{\mathbf{p}}_0 = -\,\mathrm{grad}_{\mathbf{r}_0}U(\mathbf{r}_0)$, и $E(t) = \int\limits_0^t dt\ [\,\mathbf{p}_0^2/2m - U(\mathbf{r}_0)\,]$. Величина F является симметричной матрицей размерности 3 х 3, с комплексными элементами, зависящими от времени, и подчиняется матричному уравнению типа Риккати

$$i\hbar\dot{F} = (2\hbar^2/m)\,F^2 - (1/2)\,U_2, \tag{3}$$

где $U_2(t)$ – симметричная вещественная матрица квадратичных членов в разложении потенциальной энергии по $\vec{\rho}$

$$U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r}_0) + (\vec{\rho}\cdot \mathrm{grad}_{\mathbf{r}_0}U(\mathbf{r}_0)) + \frac{1}{2!}(\vec{\rho}, U_2\vec{\rho}\,) + \ldots \tag{4}$$

Решение (2) тем ближе к точному, чем больше вещественные части собственных значений матрицы F, т. е. чем меньше размеры волнового пакета (2). Это решение удовлетворяет уравнению (1) при пренебрежении членами третьего и более высокого порядка по $\vec{\rho}$ в разложении потенциальной энергии (4); сами же эти члены тем меньше, чем меньше размеры волнового пакета. Величина $G(t)$ выражается через F посредством соотношения $G(t) = G_0\exp[-(i\hbar/m)\int\limits_0^t dt\ \mathrm{Sp}\,F]$.

Решение уравнения (1) при пренебрежении в потенциальной энергии (4) членами третьего и более высокого порядка сводится к задаче о параметрическом возбуждении осциллятора /1 – 3/.

Поскольку сферически симметричные тела притягиваются друг к другу как материальные точки, то движение их по орбите можно рассматривать, как движение материальной точки с массой, равной массе тела, расположенной в центре инерции тела, и описывать это движение тем же гамильтонианом.

)

Рассмотрим движение сферически симметричного тела массы m по круговой орбите в поле тяготения неподвижного тела массы M. Потенциальная энергия имеет в этом случае вид $U(r) = -GMm/r$. Разлагая ее в ряд в окрестности точки $x_0 = r_0 \cos\omega t$, $y_0 = r_0 \sin\omega t$, $z_0 = 0$, (r_0 – радиус орбиты, $\omega = \sqrt{GM/r_0^3}$ – частота обращения тела по орбите), для элементов матрицы $a = 2U_2/m\omega^2$ получаем выражения: $a_{11} = 1 - 3\cos^2\omega t$, $a_{22} = 1 - 3\sin^2\omega t$, $a_{12} = -3\sin\omega t\cos\omega t$, $a_{33} = 1$, $a_{13} = a_{23} = 0$.

В координатах, связанных с движущимся телом, эта матрица должна быть постоянной. Действительно, переходя к новым координатам с помощью матрицы S^{-1} поворота вокруг оси z на угол ωt, получим

$$S^{-1}U_2S = (1/2)\,m\omega^2 D, \qquad \Phi = (2\hbar/m)\,S^{-1}FS. \tag{5}$$

Видно, что матрица D диагональна и имеет постоянные диагональные элементы $[-2;\ 1;\ 1]$. Таким образом уравнение (3) приводится к виду

$$i\dot{\Phi} + i[\Sigma;\ \Phi] = \Phi^2 - \frac{1}{2}\omega^2 D, \tag{6}$$

где Σ – постоянная матрица 3 x 3, имеющая лишь два отличных от нуля элемента $\Sigma_{12} = -\Sigma_{21} = -1$. Уравнение (6) допускает постоянное решение в виде симметричной матрицы Φ_0 с элементами: $\Phi_0^{11} = 2\Phi_0^{22} = 2\omega a$, $\Phi_0^{12} = i\omega\beta$, $\Phi_0^{33} = \omega\gamma$, $\Phi_0^{13} = \Phi_0^{23} = 0$, где $a = \sqrt{7/12}$, $\beta = 3$, $\gamma = 1/\sqrt{2}$. Следовательно, волновой пакет (2) в случае кругового движения по орбите описывается стационарным распределением

$$\Psi \propto \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(\sqrt{14}\,\rho_r^2 + 6i\rho_r\rho_\varphi + \sqrt{\frac{7}{2}}\,\rho_\varphi^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_z^2\right)\right],$$

где ρ_r, ρ_φ – смещения от центра пакета в плоскости орбиты соответственно по нормали к ней и вдоль нее; ρ_z – смещение по нормали к плоскости орбиты. Поперечные размеры волнового пакета во всех трех направлениях по порядку величин одинаковы; при этом характерный размер равен $\rho_0^2 = \hbar/m\omega = (\hbar/m) \times \sqrt{r_0^3/GM}$. Оценки показывают, что для всех тел солнечной системы этот размер мал. Так, для земного шара $\rho_0 \cong 10^{-24}$ см, для далекого метеорита (период обращения 10^3 лет, $m \cong 10^{-1}$ г) $\rho_0 \cong 10^{-8}$ см.

Для исследования устойчивости решения Φ_0 линеаризуем уравнение (6). Пусть $\Phi = \Phi_0 + \Delta\Phi(t)$; тогда линеаризованное уравнение (6) примет вид

$$i\Delta\dot{\Phi} = (\Phi_0 \cdot \Delta\Phi + \Delta\Phi \cdot \Phi_0) - i[\Sigma;\ \Delta\Phi]. \tag{7}$$

Можно показать, что возмущения в перпендикулярной к орбите плоскости осциллируют со временем, т. е. устойчивы. Поэтому исследуем возмущения в плоскости орбиты. Для этого будем считать, что все матрицы, входящие в (7), имеют размерность 2 x 2,

$$\Delta\Phi = \begin{pmatrix} p & r \\ r & q \end{pmatrix} e^{-i\delta\omega t}, \qquad \Phi_0 = \omega\begin{pmatrix} 2a & i\beta \\ i\beta & a \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \omega\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнение (7) сводится к системе трех линейных уравнений относительно p, q, r:

$$(\delta - 4a)\,p - 2i(1+\beta)\,r = 0;\ i(1-\beta)\,p + (\delta - 3a)\,r - i(1+\beta)\,q = 0;\ 2i(1-\beta)\,r + (\delta - 2a)\,q = 0.$$

Приравнивая нулю детерминант этой системы, получим следующие значения корней характеристического уравнения:

$$\delta_1 = 3a\,(\cong 5{,}61),\ \delta_{2,3} = 3a \pm i\sqrt{4(\beta^2 - 1) - a^2}\ (\cong 5{,}61 \pm 5{,}34 \cdot i). \tag{8}$$

Второе и третье значения корней показывают, что возмущения волнового пакета в плоскости орбиты могут нарастать со временем, т. е. неустойчивы. Строго говоря, эффект расплывания волнового пакета по орбите известен. Например, известно, что истинно стационарным решением кулоновой задачи /4/, которая математически вполне эквивалентна рассматриваемой, является решение, распределенное по всей орбите, а не сосредоточенное в виде волнового пакета. Представляет интерес величина коэффициента расплывания волнового пакета со временем $\mathrm{Jm}\,\delta_2$; этот коэффициент оказывается очень большим. Оценка (8) применима лишь при малых возмущениях. Но, если бы коэффициент расплывания не уменьшался с нарастанием возмущения, что вполне вероятно, то даже для земного шара волновой пакет приобрел бы макроскопические размеры ($\sim$ 1 см и более) всего за несколько лет.

Таким образом, в работе показано, что при движении макроскопического тела по круговой орбите небольшие возмущения его волнового пакета быстро возрастают со временем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., Наука, 1971.
2. Малкин И. А., Манько В. И. Динамические симметрии и конкретные состояния квантовых систем. М., Наука, 1979.
3. Додонов В. В., Манько В. И. Труды ФИАН, 183, 71 (1987).
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. М., ГИФМЛ, 1963.

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 6 июля 1988 г.