Краткие сообщения по физике № 1-1989 г.

УДК 539.12.01

ДЕЙСТВИЕ ДЛЯ НЕАРХИМЕДОВОЙ СТРУНЫ И ДЕРЕВЬЯ БРЮА – ТИТСА

А.В. Забродин

Показано, что естественным аналогом мирового листа в теории неархимедовых струн является дерево Брюа – Титса . Построена модель теории поля на дереве, дающая амплитуды Фройнда – Олсона для процессов испускания частиц с границы мирового листа.

В литературе интенсивно обсуждаются основные принципы теории струн, которая представляется наиболее перспективным кандидатом на роль единой теории фундаментальных взаимодействий. В /1/ отмечено, что мировой лист струны может иметь неархимедову топологию, т.е. являться некоторым многообразием над полем p-адических чисел Q_p (p – простое число). Учет этой возможности должен существенно обогатить теорию, поскольку поля Q_p наряду с полем обычных вещественных чисел R суть все пополнения поля рациональных чисел Q.

Фройнд и Олсон /1/ указали формальный рецепт p-адического обобщения древесных амплитуд бозонной струны. Основные правила таковы: а) границей мирового листа открытой струны является поле Q_p (с инвариантной мерой интегрирования dx), б) коррелятор двух p-адических вертексных операторов в точках x и y $(x, y \in Q_p)$ считается равным $|x-y|_p^{-a}$, где a – некоторый "критический показатель", а $|...|_p$ – p-адическая норма. Можно проверить, что правила Фройнда – Олсона эквивалентны вычислению корреляторов в нелокальной теории поля на Q_p с действием

$$\tilde{S}_p[\varphi] \sim \int_{Q_p} dx\, dy\, (\varphi(x) - \varphi(y))^2 |x-y|_p^{-2}, \tag{1}$$

впервые обсуждавшимся, по-видимому, Книжником и Поляковым. Для простоты рассмотрим только одно бозонное поле φ ($\varphi(x)$ – непрерывная вещественнозначная функция на Q_p). Амплитуды вычисляются по формуле

$$A_N(k_1 ... k_N) \sim \int D\varphi \int_{Q_p} \prod_j dx_j \exp\left\{-\tilde{S}_p + i \sum_{j=1}^{N} k_j \varphi(x_j)\right\}. \tag{2}$$

Для обычной архимедовой струны формулы (1) и (2) (с заменой $Q_p \to R$) дают классические амплитуды Коба – Нильсена и имеют ясный смысл: $\tilde{S}_p[\varphi]$ есть эффективное действие на границе R мирового листа. Соответствующий лагранжиан равен $\varphi(x)\,\partial_n\varphi(x)$, где $x \in R$, а $\partial_n\varphi(x)$ – нормальная производная на границе от функции φ, гармонически продолженной на верхнюю полуплоскость. Этот эффективный лагранжиан получается из "истинного" струнного лагранжиана $(\partial\varphi)^2$ на мировом листе.

Цель данной работы – определить "истинное" действие неархимедовой струны, которое на границе давало бы эффективное действие (1).

Рассмотрим однородное пространство линейной p-адической группы GL(2): $T_p = PGL(2, Q_p)/PGL(2, Z_p)$. Здесь $PGL(2, K) = GL(2, K)/K^*$, где K^* – мультипликативная группа кольца K, Z_p – кольцо целых p-адических чисел. Пространство T_p называется деревом Брюа – Титса /2/, оно может быть представлено вершинами бесконечного дерева (рис. 1), из каждой вершины которого выходит p + 1 ребро. Любые две точки z_1, z_2 в дереве можно соединить единственным путем; назовем расстоянием $d(z_1, z_2)$ между ними длину этого пути (число ребер). Это расстояние инвариантно при действии группы $GL(2, Q_p)$. Будем считать, что в дереве есть отмеченная точка 0 – "начало" (ее стабилизатор $GL(2, Z_p)$).

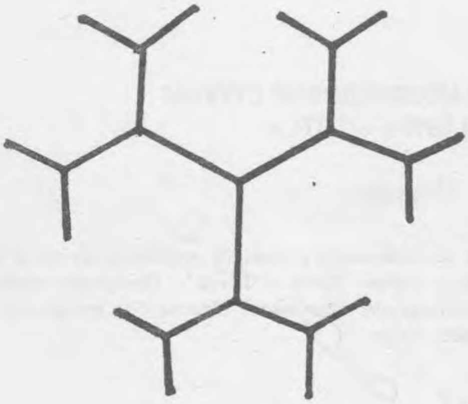

Рис. 1. Дерево Брюа – Титса для p = 2 (фрагмент).

Границей дерева ∂T_p назовем множество бесконечных путей без возвращений, начинающихся в 0. В /2/ показано, что ∂T_p естественно отождествляется с проективной прямой $P_1(Q_p)$, или, после выбора координатной функции, с Q_p. При этом p-адическая норма получает красивую графическую интерпретацию /2/.

Определим на ∂T_p $GL(2, Z_p)$-инвариантную меру μ_0. Если перерезать некоторое ребро (z, z') $(d(0,z') = d(0, z) + 1)$, граф T_p распадается на два поддерева, одно из которых не содержит начала 0. Назовем его веткой B_z с началом в z; определение границы ветки ∂B_z очевидно. Для любой ветки положим

$$\mu_0(\partial B_z) = p^{-d(0, z) - 1} \tag{3}$$

Эта мера связана с мерой dx на Q_p соотношениями $d\mu_0(x) = dx$ при $|x|_p \leqslant 1$ и $d\mu_0(x) = dx/|x|_p^2$ при $|x|_p > 1$.

Лапласиан на дереве (элемент алгебры Гекке /3/) естественно выбрать в виде

$$\hat{\Delta}_p \varphi(z) = (p+1)\varphi(z) - \sum_{i=1}^{p+1} \varphi(z_i). \tag{4}$$

Здесь $\varphi(z)$ – функция на вершинах дерева, z_i – ближайшие соседи точки z. Решения уравнения Лапласа строятся следующим образом. Пусть $x \in \partial T_p$, $z \in T_p$. Нарисуем в дереве путь $z \to z_1' \to z_2' \to \ldots$ из z в x и по очереди для всех n от 1 до ∞ отметим все точки на сфере радиуса n с центром в z'_n кроме тех точек z', для которых путь $z' \to z'_n$ проходит через z'_{n+1}. Назовем совокупность отмеченных точек орисферой $S_{x,z}$. Введем целозначную функцию $\langle z, x\rangle$, которая равна минимальному расстоянию от 0 до $S_{x,z}$, взятому с минусом, если 0 находится внутри орисферы. Можно показать, что

$$F(z) = p(p+1)^{-1} \int_{\partial T_p} d\mu_0(x) f(x) p^{\langle z, x\rangle} \tag{5}$$

есть гармоническая функция на дереве с граничным значением f(x). Нам потребуется еще аналог нормальной производной на границе:

$$\partial_n^{(p)} \varphi(x) = \lim_{z \to x} [\varphi(z) - \varphi(x)]/\mu_0(\partial B_z). \tag{6}$$

Будем считать дерево T_p внутренностью мирового листа открытой p-адической струны. Рассмотрим локальную теорию поля на дереве с действием

$$S_p = \sum_{z \in T_p} \varphi(z) \hat{\Delta}_p \varphi(z) = \sum_e (\partial_e \varphi)^2 \tag{7}$$

(последнее равенство — с точностью до возможного граничного члена). Здесь e — ребро, $\delta_e\varphi$ — разность значений φ на его концах. Экстремали S_p — это гармонические функции (5). Пользуясь соотношениями (3), (5), (6) и отождествлением ∂T_p с Q_p, можно получить из функционального интеграла с "истинным" действием неархимедовой струны S_p (7) эффективное действие на границе (т.е. на Q_p). Оказывается, что оно совпадает с $\widetilde{S}_p$ из (1); тем самым показано, что правила Фройнда — Олсона могут быть выведены из чрезвычайно простой модели на дереве.

Автор благодарен А.А. Герасимову, Я.И. Когану, Д.Р. Лебедеву, А.С. Лосеву, А.Д. Миронову, Я. Нековару и Б.Л. Спокойному за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Freund P.G.O., Olson M. Phys. Lett., **B199**, 186 (1987).
2. Манин Ю.И. В сб. Современные проблемы математики, ВИНИТИ, 1974, т.3.
3. Жаке Э., Ленглендс Р. Автоморфные формы на GL(2). М., Мир, 1973.

Поступила в редакцию 30 сентября 1988 г.