*Краткие сообщения по физике № 3-1989 г.*

УДК 533. 916

# ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПЛАЗМЫ

В.Ф. Ковалев, В.В. Пустовалов

*Предложен основанный на групповом анализе метод приближенного решения уравнений нелинейного взаимодействия интенсивной р-поляризованной электромагнитной волны с одномерно неоднородной электронной плазмой. Найденная приближенная группа определяет функциональную автомодельность обсуждаемой плазменной системы.*

Взаимодействие р-поляризованного электромагнитного излучения частоты $\omega$ с неоднородной и непрозрачной электронной плазмой определяется системой шести нелинейных нестационарных двумерных дифференциальных уравнений для шести неизвестных функций – компонент магнитного $B_z$ и электрического $E_x$, $E_y$ полей, двух компонент $V_x$, $V_y$ скорости электронов и их плотности n, зависящих от трех переменных: координат x, y и времени t. Предлагаемая заметка посвящена приближенному аналитическому решению этой системы уравнений в произвольном порядке нелинейности с выходом за рамки теории возмущений. Суть развиваемого подхода состоит, во-первых, в приближенном групповом анализе исходной системы шести уравнений и выделении из нее, благодаря естественным для данной задачи параметрам малости (малый угол падения $\vartheta$, слабая неоднородность плазмы и малая ширина $\Delta$ плазменного резонанса), более простой системы двух одномерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, для которой находится точная и достаточно широкая группа точечных непрерывных преобразований по параметру нелинейности и, во-вторых, в продолжении с помощью найденного оператора группы в существенно нелинейную область решений, которые получены по теории возмущений и удовлетворяют граничным условиям. Данный подход полностью укладывается в рамки представлений о функциональной автомодельности (ФА)* обсуждаемой системы (плазма + излучение) и отличается от традиционных вариантов метода ренормализационной группы тем, что основывается на идее приближенной группы /2/, оператор которой отыскивается хорошо разработанными регулярными методами /3, 4/.

Наибольший вклад в нелинейные эффекты обсуждаемого взаимодействия электромагнитной волны с неоднородной по x плазмой определяется компонентой электрического поля и скорости электронов вдоль градиента плотности. При этом их зависимость от поперечной (к градиенту) координаты y оказывается вблизи плазменного резонанса более плавной, чем зависимость от координаты x. Поэтому для нахождения x-компоненты электрического поля $E_x$ и скорости $V_x$ электронов можно записать простую систему двух нелинейных нестационарных одномерных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$D v = P; \quad DP = -\omega_L^2 v; \quad D \equiv \omega(\partial/\partial\tau) + av(\partial/\partial x); \quad \tau \equiv \omega t - (\omega y/c)\sin\vartheta \tag{1}$$

Здесь v и P – нормированные на параметр a значения скорости электронов $V_x$ и электрического поля $E_x$, параметр $a \propto \sqrt{q}$ определяется потоком q падающего на плазму излучения и коэффициентом линейной трансформации; $\omega_L(x)$ – плазменная частота (по заданной плотности ионов); c – скорость света.

Уравнения (1) допускают группу точечных однопараметрических преобразований с инфинитезимальным оператором вида /3, 4/:

$$X = \xi_1(\partial/\partial\tau) + \xi_2(\partial/\partial x) + \eta_1(\partial/\partial v) + \eta_2(\partial/\partial P) + (\partial/\partial a). \tag{2}$$

---

* Понятие ФА широкого класса достаточно сложных физических систем впервые введено и проиллюстрировано на конкретных примерах Д. В. Ширковым /1/.

Координаты $\xi_{1,2}$ и $\eta_{1,2}$ как функции четырех переменных $\tau$, x, v, P и параметра группы a даются решениями системы определяющих уравнений в соответствии с известной регулярной процедурой /3, 4/. Они могут быть найдены также с помощью теории возмущений, учитывающей характерные для обсуждаемого взаимодействия граничные условия. При этом в простейшем случае слабонеоднородной плазмы оператор (2) принимает вид

$$X = -(P/\omega^2)(\partial/\partial x) + (\partial/\partial a), \; \xi_1 = \eta_1 = \eta_2 = 0; \; \xi_2 = -\omega^{-2} P. \tag{3}$$

Группа с оператором (3) имеет в качестве инвариантов группового преобразования величины $\tau$, v и P, а групповой закон

$$x(a_1 + a_2, \eta) = x(a_1, x(a_2, \eta)), \; x(0, \eta) \equiv \eta,$$

определяемый решением соответствующего уравнения Ли, дается линейной по параметру a зависимостью

$$x(a, \eta) \equiv x = \eta - P(\eta, \tau)\,\omega^{-2} a. \tag{4}$$

Эта группа является точной для уравнений (1) (при $\omega_L = \omega$) и приближенной (в смысле /2/) для исходной системы шести нелинейных уравнений в частных производных. Соответствующее группе (3) решение уравнений (1) имеет вид:

$$\begin{gathered} x = \eta + \epsilon(f_1 \sin\tau + f_2 \cos\tau); \; \epsilon \equiv (q/q_0)^{1/2}; \\ aP/\omega^2\Delta = -\epsilon(f_1 \sin\tau + f_2 \cos\tau); \; av/\omega\Delta = \epsilon(f_1 \cos\tau - f_2 \sin\tau). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь параметр $\epsilon \propto a \propto \sqrt{q}$ зависит от потока $q_0$ опрокидывания плазменной волны в критической точке и не превосходит единицы, а функции $f_{1,2}(\eta)$ определяются хорошо изученной линейной структурой поля, явный вид которой может быть различным в зависимости от профиля плотности и теплового движения электронов плазмы. Решение (5) является точным решением уравнений (1) при $\omega_L = \omega$. В холодной плазме с линейным профилем плотности функции $f_{1,2}$ даются равенствами:

$$f_1 = (1 + \eta^2)^{-1}; \; f_2 = \eta(1 + \eta^2)^{-1}. \tag{6}$$

Учет слабого теплового движения электронов модифицирует их

$$f_1 = \int_0^\infty d\xi \cos(\eta\xi + \xi^3/3), \quad f_2 = \int_0^\infty d\xi \sin(\eta\xi + \xi^3/3). \tag{7}$$

В (6) и (7), как и в основной формуле для структуры поля (5), координаты x и $\eta$ обезразмерены нормировкой на ширину плазменного резонанса $\Delta$. Уравнения для недостающих четырех величин (электрического поля $E_y \propto Q$, магнитного поля $B_z \propto R$, y-компоненты скорости $V_y \propto u$ и плотности $\propto N$) в переменных $(\eta, \tau)$ имеют вид:

$$\begin{gathered} (\partial Q/\partial\eta) = -(\omega\Delta/c)\sin\vartheta\,(\partial P/\partial\tau); \; \omega(\partial u/\partial\tau) = Q; \\ (\partial R/\partial\eta) = (av/c)(\partial Q/\partial\eta) - (au/c)(\partial P/\partial\eta); \; N \approx \omega^2 (\partial x/\partial\eta)^{-1}. \end{gathered} \tag{8}$$

Их интегрирование элементарно. Формулы (5), (8) являются основным физическим результатом применения предлагаемого группового подхода к решению исходных шести уравнений. По своему духу они являются результатом ренормгруппового продолжения, удовлетворяющего граничным условиям линейного приближения в нелинейную область с помощью оператора группы (3).

В пренебрежении сильнонелинейными эффектами с помощью (5) и (8) возникают результаты теории генерации гармоник произвольной кратности в холодной /5/ и горячей /6/ неоднородной плазме (при использовании соответственно формул (6) и (7) для $f_{1,2}$). Учет сильной нелинейности (влияния высших гармоник на низшие) существенно меняет зависимость коэффициента преобразования в излучаемые из плазмы гармоники от плотности потока падающего на плазму электромагнитного излучения /7/ и температуры плазмы /8/. На нулевой частоте (в статическом приближении) формулы (5) и (8) могут служить основой для анализа процессов нелинейной деформации профиля плотности электронов, генерации неоднородных статических электрических и магнитного полей, формирования потоков электронов в окрестности критической точки плазмы. На основной частоте $\omega$ возникает нелинейное алгебраическое уравнение для z-компоненты магнитного поля в критической точке $x = 0$, определяющего коэффициент трансформации падающего на плазму p-поляризованного излучения.

Авторы благодарны Н.Х. Ибрагимову и Д.В. Ширкову.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ширков Д. В. ДАН СССР, **263**, 64 (1982); ТМФ, **60**, 218 (1984).
2. Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Препринт ИПМ АН СССР № 150, М., 1987.
3. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М., Наука 1978.
4. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. М., Наука, 1983.
5. Владимирский А. Б., Силин В. П. Физика плазмы, **6**, 354 (1980).
6. Троценко Н. П. Кандидатская диссертация, МФТИ, М., 1983.
7. Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Препринт ФИАН № 78, М., 1987.
8. Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. Препринт ФИАН № 56, М., 1988.

Поступила в редакцию 18 ноября 1988 г.