Краткие сообщения по физике № 3-1989 г.

УДК 530. 145

МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНОРЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ НА НЕТРИВИАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

А.Г. Ушверидзе

Предложен метод построения точно- и квазиточнорешаемых моделей на многомерных нетривиальных многообразиях.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + 2B(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + C(\lambda) + e_1 C_1(\lambda) + \ldots + e_n C_n(\lambda)\right\}\xi(\lambda) = 0, \tag{1}$$

в котором $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ и $C_i(\lambda)$ $(i = 1, \ldots, n)$ – фиксированные явные функции, а e_i $(i = 1, \ldots, n)$ – числовые параметры, которые мы будем называть спектральными. Если существует бесконечное (счетное) множество наборов параметров e_i, для каждого из которых уравнение (1) разрешимо в некотором конечнопараметрическом классе явных функций, то мы будем называть (1) многопараметрическим точнорешаемым спектральным уравнением (МТС уравнением). Заметим, что переходы к новым системам спектральных параметров и весовых функций $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i C_i(\lambda) = \sum\limits_{i=1}^{n} e_i' C_i'(\lambda)$, т. е. преобразования группы $GL(n)$, порождают новые МТС уравнения типа (1).

Т е о р е м а 1. Пусть дано МТС уравнение типа (1) и пусть среди бесконечного множества допустимых наборов параметров $e_1, \ldots, e_n$ существует К наборов, отличающихся лишь значениями параметров $e_1, \ldots, e_D$. Построим уравнение Шредингера

$$\left\{-\sum_{i,k=1}^{D}\sqrt{g}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\left(\frac{g_{ik}}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\right) + V\right\}\Psi = E\Psi, \quad g \equiv \det\|g_{ik}\| \tag{2}$$

на D-мерном, вообще говоря, кривом многообразии с метрикой $g_{ik} = F^{-1}(\vec{\lambda})G_i(\vec{\lambda})$, $i = 1, \ldots, D$; $g_{ik} = 0$, $i \neq k$, где $F(\vec{\lambda}) \equiv \det\|C_i(\lambda_k)\|$, $G_i(\vec{\lambda})$ – алгебраическое дополнение элемента $C_i(\lambda_1)$ в матрице $\|C_i(\lambda_k)\|$. Пусть потенциал

$$V(\lambda) = -\sum_{i=1}^{D}\left[C(\lambda_i) + \sum_{\beta=D+1}^{n} e_\beta C_\beta(\lambda_i)\right]G_i(\vec{\lambda})F^{-1}(\vec{\lambda}) -$$

$$-\sum_{i,k=1}^{D} g_{ik}\sqrt[4]{gh^2}\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_k}\frac{1}{\sqrt[4]{gh^2}} - \sum_{i,k=1}^{D}\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial\lambda_i}(g_{ik}h)\sqrt[4]{gh^2}\frac{\partial}{\partial\lambda_k}\frac{1}{\sqrt[4]{gh^2}},$$

где

$$h(\vec{\lambda}) = F(\vec{\lambda})\exp\sum_{i=1}^{D} 2\int^{\lambda_i} B(\lambda)\,d\lambda.$$

Наше утверждение состоит в том, что модель (2) является квазиточнорешаемой моделью К-го порядка, если $D < n$, и точнорешаемой моделью, если $D = n$. Решения уравнения (2) связаны с решениями МТС уравнения (1) формулами:

$$\Psi(\vec{\lambda}) = \sqrt[4]{gh^2}\prod_{i=1}^{D}\xi(\lambda_i), \quad E = e_1.$$

Доказательство состоит: 1) в интепретации МТС уравнения (1) как одномерного уравнения, возникшего в результате разделения переменных из некоторого многомерного уравнения с одним спектральным параметром; 2) в отождествлении зависящих от решения параметров $e_2, \ldots, e_D$ с константами разделения.

Таким образом, явное построение точно- и квазиточнорешаемых уравнений сводится к построению МТС уравнений типа (1). Ниже мы построим МТС уравнения Риккати

$$y'(\lambda) + a(\lambda) y^2(\lambda) + 2b(\lambda) y(\lambda) + \sum_{i=1}^{n} e_i c_i(\lambda) = 0, \tag{3}$$

которые с помощью замены $\xi'(\lambda)/\xi(\lambda) = a(\lambda) y(\lambda) + a'(\lambda)/2a(\lambda)$ сводятся к уравнению (1). Связь между коэффициентными функциями дается формулами:

$$B = b,\ C = \frac{1}{2}\left(\frac{a'}{a}\right)' - \frac{1}{4}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + b\left(\frac{a'}{a}\right),\ C_i = ac_i.$$

Теорема 2. Пусть $\Delta(\lambda)$ и $\Omega(\lambda)$ – функции, удовлетворяющие функциональному уравнению

$$\begin{gathered}\Delta(\lambda_1)\Delta(\lambda_2) + \Delta(\lambda_2)\Delta(\lambda_3) + \Delta(\lambda_3)\Delta(\lambda_1) + \Omega(\lambda_1) + \Omega(\lambda_2) + \Omega(\lambda_3) = 0,\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0,\end{gathered} \tag{4}$$

дополненному условиями нечетности $\Delta(\lambda)$ и четности $\Omega(\lambda)$. Определим функции

$$X(\lambda, f) = \Delta(\lambda - f) - \Delta(\lambda - s),\ Y(\lambda) = -\Delta'(\lambda - s),\ Z(\lambda) = -\frac{1}{2}\Delta''(\lambda - s)$$

и выберем a, b и c_i, $i = 1, \ldots, n$ ($n = N+3$) в виде

$$a(\lambda) = \sum_{a=1}^{N} a_a X(\lambda, f_a),\ b(\lambda) = \sum_{a=1}^{N} b_a X(\lambda, f_a),\ c_a(\lambda) = X(\lambda, f_a),$$

$$c_{N+1}(\lambda) = Y(\lambda),\ c_{N+2}(\lambda) = Z(\lambda),\ c_{N+3}(\lambda) = 1.$$

Тогда в классе функций вида $y(\lambda) = \sum_{i=1}^{M} \eta_i X(\lambda, \xi_i)$ уравнение (3) будет иметь бесконечное (счетное) множество решений, соответствующих значениям спектральных параметров, находимых вместе с неизвестными числами η_i, ξ_i, $i = 1, \ldots, M$ из системы числовых уравнений. Эту систему, содержащую предполагающиеся известными функции $\Delta(\lambda)$ и $\Omega(\lambda)$, мы не выписываем здесь из-за ее громоздкости.

Теорема 3. Уравнение (4) имеет три типа решений: а) рациональные – $\Delta(\lambda) = \lambda^{-1} + \gamma\lambda$, б) тригонометрические – $\Delta(\lambda) = \omega \operatorname{ctg} \omega\lambda + \gamma\lambda$ и в) эллиптические – $\Delta(\lambda) = \xi(\lambda, \omega, \rho) + \gamma\lambda$. Вид соответствующих функций $\Omega(\lambda)$ во всех трех случаях может быть восстановлен из уравнения

$$\Delta'(\lambda) + \Delta^2(\lambda) = 2\Omega(\lambda) + \Omega(0).$$

Теоремы 1 – 3, дополненные возможностью совершения $GL(n)$-преобразований над системой весовых функций, позволяют строить бесчисленное множество точнорешаемых уравнений Шредингера на многомерных кривых многообразиях и сводить задачу построения квазиточнорешаемых уравнений Шредингера к поиску вырождений в системе спектральных параметров e_a. Необходимые вырождения возникают в уравнении (1) при $a(\lambda) = 1$ в рациональном и тригонометрическом случаях /1 – 3/.

Заметим, что точно- и квазиточнорешаемые модели могут возникать и в одномерном случае ($N = 2, 3, 4$). Модели, соответствующие выбору $a(\lambda) = 1$, были описаны в /1/. Однако выбор $a(\lambda) \neq 1$ тоже оказывается достаточно интересным. Например, в случае $N = 2$, в силу соотношения $e_1 + e_2 = 0$, при $X(\lambda, f) = (\lambda - f)^{-1}$ в (3) имеется лишь один спектральный параметр, и мы получаем класс уравнений, описывающих точнорешаемые модели работы /4/. Для получения других точно- и квазиточнорешаемых моделей можно воспользоваться форм-инвариантностью уравнения (3) относительно дробно-линейной замены $y \to (A_1 y + A_2)/(A_3 y + A_4)$, где A_i – некоторые функции. Например, в рассмотренных выше случаях, когда $\Sigma e_a c_a(\lambda) = c(\lambda) + Ed(\lambda)$, замена $y \to -\frac{E - E_0}{y - y_0} d$, где $E_0 = 0$, y_0 – частное решение (3), сводит это уравнение к другому уравнению Риккати ($a \to 1$, $b \to a y_0 + b - \frac{d'}{2d}$, $c \to 0$, $d \to a$), имеющему столько же точных решений, сколько и исходное. При этом спектры нового и старого уравнений совпадают.

Вырождение в системе, ответственное за квазиточнорешаемость, может быть связано с наличием скрытой группы симметрии, а может быть и случайным. В последнем случае возникают конечные серии квазиточнорешаемых моделей, порядок которых не превышает некоторого K_{max}. Можно показать, что при $a(\lambda) = 1$

$$K_{max} > D + 3. \tag{5}$$

Из (5) следует, что существует бесконечное множество D-мерных квазиточнорешаемых моделей порядка D + 3. Этот факт может быть доказан независимо. Пусть $y^{(i)}(\lambda)$ и $e_1^{(i)}$ ..., $e_D^{(i)}$ – D + 3 явно известных решений уравнения Риккати:

$$y_i(\lambda) + a(\lambda) y_i^2(\lambda) + 2b(\lambda) y_i(\lambda) + c(\lambda) + \sum_{n=1}^{D} e_n^{(i)} c_n(\lambda) = 0. \tag{6}$$

Рассматривая (6) как систему D + 3 линейных уравнений относительно D + 3 неизвестных функций $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$, $c_n(\lambda)$, $n = 1, \ldots, D$, можно решить ее явно и найти эти функции. Таким образом, пользуясь теоремой 1, мы можем явно построить D-мерное уравнение Шредингера, имеющее D + 3 явных решений.

В заключение упомянем еще об одном, описанном в /1/, способе построения многомерных квазиточнорешаемых моделей. Согласно /1/, оператор

$$H = H_0 + \sum_{i=1}^{n} L_i (H_i - e_i),$$

составленный из коммутирующих между собой операторов H_0, H_i и произвольных операторов L_i, является оператором квазиточнорешаемой линейной задачи, если одним и тем же собственным значениям операторов H_i соответствует несколько собственных значений оператора H_0. В качестве операторов H_i можно взять операторы вида

$$H_i = \tilde{a}_i(\lambda_i) \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i^2} + \tilde{b}_i(\lambda_i) \frac{\partial}{\partial \lambda_i} + \tilde{c}_i(\lambda_i), \tag{7}$$

очевидно, коммутирующие между собой. Можно показать, что, выбирая операторы L_i в виде

$$L_i = u_{i1}(\lambda_1) u_{i2}(\lambda_2) \ldots u_{in}(\lambda_n),$$

всегда можно подобрать функции $u_{ik}(\lambda)$ так, чтобы оператор H принял вид гамильтониана в уравнении Шредингера типа (2). Параметры получаемого уравнения, а именно, метрический тензор g_{ik} и потенциал V, выражаются через коэффициентные функции уравнений (7) явно. Среди построенных таким образом моделей встречаются квазиточнорешаемые модели как конечного, так и бесконечного порядков. Это зависит от того, с какими уравнениями, квазиточнорешаемыми или точнорешаемыми, связаны одномерные операторы H_i.

Автор благодарен В.Г. Кадышевскому и В.Я. Файнбергу за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 40 (1988).
2. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 9, 21 (1988).
3. Ушверидзе А. Г. Препринт ФИАН № 158, М., 1988.
4. Натанзон Г. А. ТМФ, 38, 219 (1979).

Поступила в редакцию 18 ноября 1988 г.