Краткие сообщения по физике № 5-1989 г.

УДК 530. 145

ЭФФЕКТИВНОЕ ГРАНИЧНОЕ ДЕЙСТВИЕ В ТЕОРИИ ФЕРМИОННЫХ СТРУН

А.В. Маршаков

Вычисляется континуальный интеграл Полякова для фермионной струны типа Невё – Шварца – Рамона (НШР) на римановой поверхности с краем при специальном выборе локальных граничных условий на фермионные поля. Полученные выражения применяются при исследовании поведения функции Грина струны в конфигурационном пространстве. Обсуждается обобщение эффективного фермионного действия на случай неархимедовых струн.

Цель статьи состоит в исследовании свойств эффективного граничного действия в теории десятимерной фермионной струны НШР, являющегося результатом вычисления континуального интеграла Полякова /1/ на римановой поверхности с краем при специальном выборе локальных граничных условий на фермионные поля, не нарушающих N = 1 суперсимметрию действия. Результатом вычисления будет функционал от граничных условий, являющийся волновой функцией в некотором пространстве. Континуальный интеграл по супермультиплету материи имеет вид:

$$Z = \int Dx \exp\Big(- \int_\Sigma \bar\partial x \partial x\Big) \int D\psi D\bar\psi \exp\Big(\int_\Sigma \psi\bar\partial \psi + \bar\psi \partial\bar\psi \Big) S \dots S, \tag{1}$$

где Σ – риманова поверхность с краем; $\bar\partial$, ∂ – операторы, локально представимые в виде $\partial/\partial\bar z$, $\partial/\partial z$; $S \dots S$ – произведение супертоков. Рассмотрим случай, когда супертоки отсутствуют (например, вследствие граничных условий). Тогда Z в (1) факторизуется в два сомножителя, зависящих от метрики на поверхности и граничных условий $Z = Z_B Z_F$. Интеграл Z_B найден в /2 – 4/. Вычислим

$$Z_F = \int D\psi D\bar\psi \exp\Big(\int_\Sigma \psi\bar\partial \psi + \bar\psi \partial\bar\psi\Big) \tag{2}$$

при локальных граничных условиях /5/:

$$(\psi + \bar\psi)|_{\partial\Sigma_i} = \gamma_i, \ i = 1, \dots, M, \quad \partial\Sigma = \bigcup_{i=1}^{M} \partial\Sigma_i . \tag{3}$$

Зададим границу в локальных координатах следующим образом: $z_{(i)} \bar z_{(i)} = 1$, $i = 1, \dots, M$, что соответствует вырезанию дисков $|z_{(i)}| < 1$ из замкнутой поверхности $\tilde\Sigma$. Граничные условия на фермионы (1/2 – дифференциалы) зависят от тривиализирующего сечения, которое можно выбрать с нулевым дивизором на Σ (но не на $\tilde\Sigma$). В тривиализации $(dz_{(i)})^{1/2}$ вблизи $\partial\Sigma_i$ выражение (3) имеет вид: $\psi dz^{1/2}_{(i)} + \bar\psi\, d\bar z^{1/2}_{(i)} = \gamma_i dz^{1/2}_{(i)}$ Заменой переменных $\psi \to \psi + (2\pi)^{-1} \int_{\partial\Sigma} dw \gamma^+(w) K(z, w)$, где $\gamma^+(w)$ – часть γ, голоморфно продолжаемая на Σ (определение $K(z, w)$ см. ниже), (2) приводится к виду

$$Z_F = \int D\psi D\bar\psi \exp\Big[\int_\Sigma (\psi\bar\partial \psi + \bar\psi \partial\bar\psi) + \int_{\partial\Sigma} \gamma(\psi - \bar\psi)\Big] \tag{4}$$

с граничными условиями $(\psi + \bar\psi)|_{\partial\Sigma_i} = 0$, $\gamma(z_{(i)}) = \gamma_i(z_{(i)})$ при $z_{(i)} \in \partial\Sigma_i$.

Чтобы избавиться в (4) от линейного члена, произведем сдвиг переменной интегрирования : $\psi \to \psi + (2\pi)^{-1} \int_{\partial\Sigma} dw\gamma(w) K(z, w)$, где $K(z, w)$ – ядро Сегё /6/, определенное на дубле $\hat{\Sigma}$ поверхности Σ. Если Σ – диск, $\hat{\Sigma}$ – сфера, $K(z, w) = (z - w)^{-1}$, в общем случае

$$K(z, w) = \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}\left(\int_w^{\vec{z}} \omega\right) / \Theta\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}(0)\, E(z, w) \underset{z\to w}{\propto} \frac{1}{z - w} + \dots,$$

где $\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}$ – некоторая четная спинорная структура на $\hat{\Sigma}$ (индуцируемая с Σ), $E(z, w)$ – главная форма, $\vec{\omega}$ – вектор голоморфных 1-дифференциалов /6/. Тогда для (4) получим:

$$Z_F = e^{-I^*} \int D\psi D\bar{\psi} \exp\left(\int_\Sigma \psi\bar{\partial}\psi + \bar{\psi}\partial\bar{\psi}\right) = e^{-I^*} (\det\bar{\partial}_{1/2} \det\partial_{1/2})^{1/2},$$

$$I^* = (8\pi)^{-1} \int_{\partial\Sigma} dz \int_{\partial\Sigma} dz' \gamma(z) K(z, z') \gamma(z') = (8\pi)^{-1} \sum_{i,j} \int_{\partial\Sigma_i} dz_{(i)} \int_{\partial\Sigma_j} dz'_{(j)} \gamma_i(z_{(i)}) K(z_{(i)}, z'_{(j)}) \gamma_j(z'_{(j)}). \quad (5)$$

Выпишем (5) для цилиндра с условиями Невё – Шварца в правом и левом секторах (НШ $\times$ НШ)*:

$$I^* = (8\pi)^{-1} \left[\int_{C_q^-} dz \int_{C_q^-} dw \gamma_1(z)\gamma_1(w) K(z, w) + \int_{C_1^+} dz \int_{C_1^+} dw \gamma_2(z)\gamma_2(w) K(z, w) + 2 \int_{C_q^-} dz \int_{C_1^+} dw \gamma_1(z)\gamma_2(w) K(z, w) \right], \quad (6)$$

$$K(z, w) = \frac{1}{z - w} \frac{z + w}{2\sqrt{zw}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}}\right)^2 \frac{(1 + q^{2n} w/z)(1 + q^{2n} z/w)}{(1 - q^{2n} w/z)(1 - q^{2n} z/w)}.$$

(Использовано представление цилиндра $1 > |z| > q = e^{-2\pi t}$, $C_R^\pm$ – окружность радиуса R с учетом ориентации). Функции γ_i могут иметь полюса в точках $z_{(i)} = 0$ и при пересчете в глобальные координаты z имеют вид:

$$\gamma_1(z) = \sum_{n\leqslant 0} \gamma^{(1)}_{n+1/2} q^{-n-1/2} z^n, \qquad \gamma_2(z) = i \sum_{n\leqslant 0} \gamma^{(2)}_{n+1/2} z^{-n-1}.$$

Детерминант в (5) при стандартном выборе метрики $ds^2 \sim |dz/2\pi i z|^2$ равен

$$(\det\bar{\partial}_{1/2} \det\partial_{1/2})^{1/2} \sim \lambda(q) = q^{-1/24} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^{2k+1}) \quad (7)$$

с точностью до экспоненты от действия Лиувилля /1/.

Исследуем выражение для пропагатора струны при выбранных граничных условиях. Для этого возведем $Z = \mathscr{E}_B Z_F$ в степень D = 10 и проинтегрируем по метрикам. Лиувиллевские факторы сократятся, и при правильном выборе граничных условий на духи мера интегрирования по модулю цилиндра пропорциональна вычисленному выражению в степени D – 2 = 8. Используя Z_B /2/, получим

$$G = \int_0^\infty dt\, t^{-5} [\lambda(q)/\eta(q^2)]^8 \exp(-I_B - I^*), \quad (8)$$

где $\lambda(q)$, I^* определены в (6), (7); $\eta(q^2) = q^{1/12} \prod_{n=1}^{\infty}(1 - q^{2n})$, I_B – классическое действие /2/. Рассмотрим

---

* Для условий Рамона в обоих секторах (Р $\times$ Р) нужно фиксировать $\psi + \bar{\psi}$ на одной компоненте края и $\psi - \bar{\psi}$ – на другой. На сектор НШ $\times$ Р (5) непосредственно не обобщается.

(8) при "репараметризационно-инвариантных" граничных условиях:

$$x|_{\partial\Sigma_i} = x_i = \text{const}|_{\partial\Sigma_i},\ \gamma_i(z_{(i)})\,dz^{1/2}_{(i)} = \gamma_i dz^{1/2}_{(i)} = \text{const}|_{\partial\Sigma_i} dz^{1/2}_{(i)}. \tag{9}$$

При этом $I_B = (\Delta x)^2/2t$, $I^* = 0$ на поверхности Σ любого рода (с двумя компонентами края), где it – "центральный" чисто мнимый /6/ элемент матрицы периодов $\hat{\Sigma}$. Это следует из общего классического решения /4/

$$x_{cl} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{n=1}^{\infty} a_i^{(n)} f_i^{(n)}(z) + \vec{b} \int^{\vec{z}} \vec{\omega} + \text{c.c.}, \tag{10}$$

где $f_i^{(n)}(z)$ – базис мероморфных (с полюсами в $z_{(i)} = 0$) функций, $\vec{\omega}$ – набор голоморфных 1-дифференциалов на дубле. Можно показать, что вклад в постоянные значения $x|_{\partial\Sigma_i}$ из всей суммы (10) даёт лишь дифференциал, нормированный на цикл, гомологичный границе $\oint_{\tilde{a}} \tilde{\omega} = \oint_{\partial\Sigma_1} \tilde{\omega} = 1$, тогда $it = \oint_{\tilde{b}} \tilde{\omega}$, (где $\tilde{a} \circ \tilde{b} = 1$) – "центральный" элемент матрицы периодов дубля /6/.

Вернемся к (8) и исследуем поведение интеграла в области $t \to 0$. Имеем

$$\lambda(q) = e^{-\pi/24t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + e^{-\pi n/t}) \underset{t\to 0}{\propto} e^{-\pi/24t}(1 + \dots),$$

$$\eta(q^2) = t^{-1/2} e^{-\pi/24t} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{-\pi n/t}) \underset{t\to 0}{\propto} t^{-1/2} e^{-\pi/24t}(1 + \dots). \tag{11}$$

Тогда для (8) получим (восстанавливая $2\pi\alpha'$)

$$\int_0 t^{-1}\,dt \exp[-(\Delta x)^2/4\pi\alpha' t] \propto \log[(\Delta x)^2/\alpha']. \tag{12}$$

По поведению пропагатора в x-пространстве можно судить о причинных свойствах теории /7/. Максимальная область сингулярности в пространственно-подобном направлении, определяемая условием $(\Delta x)^2 = l^2 = 4\pi^2\alpha'$, возникает лишь при определенных граничных условиях поля x и ψ, при изменении граничных условий апричинная область сужается. Из (12) следует, что эта область пропадает при выборе явно суперсимметричных граничных условий вида (3), т. е. суперсимметрия устраняет сингулярности вне конуса. Этот факт можно понять и глядя на "дуальный" сектор $(t \to 1/t)$, в котором вычисленное выражение соответствовало бы однопетлевой статсумме в секторе Рамона. Тогда отсутствие апричинного поведения по t в (12) соответствует отсутствию тахиона в модели Рамона.

Можно указать на связь (12) с вычислениями критического поведения корреляторов по Δx в трехмерной модели Изинга, следуя идеологии работы /8/. Предлагаемый выбор граничных условий (3), (9) является удачным, так как не зависит от параметризации границ. Однако асимптотика (12) верна лишь при $D = 10$, а в трехмерии необходимо учитывать поправки, связанные с вкладом лиувиллевских мод.

Из эффективного граничного действия можно вычислять амплитуды в теории открытой фермионной струны, что позволяет использовать предлагаемые построения в теории неархимедовых фермионных струн /9/. Амплитуды на диске возникают, если

$$I^*_{p,\tau} \propto \int_{Q_p} dx \int_{Q_p} dy\ \gamma(x)\,\text{sign}_\tau(x-y)\,\gamma(y)/|x-y|_p,$$

где знаковый характер должен удовлетворять условию $\mathrm{sign}_\tau(-x) = -\mathrm{sign}_\tau(x)$. Можно рассматривать и однопетлевые амплитуды в фермионной струне по аналогии с бозонным случаем /10/, обобщив (6) следующим образом:

$$K_{p,\tau}(x,y) \sim \frac{\mathrm{sign}_\tau(x-y)}{|x-y|_p} \left. \frac{|x+y|_p}{2\sqrt{|x|_p|y|_p}} \right| \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2}{(1+q^{2n})^2} \left| \frac{(1+q^{2n}y/x)(1+q^{2n}x/y)}{(1-q^{2n}y/x)(1-q^{2n}x/y)} \right|_p .$$

Вопросы p-адического обобщения фермионных струн рассмотрены в /11/.

Автор признателен А.А. Герасимову, Вл. С. Доценко, А.В. Забродину и В.Я. Файнбергу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Polyakov A. M. Phys. Lett., **103B**, 207; 211 (1981).
2. Cohen A. et al. Nucl. Phys., **B267**, 143 (1986).
3. Blau S. et al. Texas preprint UTTG-14-87; Вайсбурд И. Д. ЯФ, **48**, 1496 (1988); Лосев А.С. Письма в ЖЭТФ, **48**, 300 (1988).
4. Morozov A., Rosly A. Preprints ITEP NN 42, 97, 149, M., 1988.
5. Alvarez–Gaume L. et al. Preprint CERN TH-5018, 1988.
6. Fay D. Theta Functions on Riemann Surfaces, Springer-Verlag, Berlin – N. Y., 1973; Мамфорд Д. Лекции о тэта-функциях. М., Мир, 1988.
7. Fainberg V. Ya., Marshakov A. V. Phys. Lett., **B211**, 81 (1988); Маршаков А.В., Файнберг В. Я. Труды ФИАН, **201**, 1989.
8. Dotsenko Vl. S. Nucl. Phys., **B285** [FSI9], 45 (1987).
9. Brekke L. et al. Nucl. Phys., **B302**, 365 (1988).
10. Lebedev D., Morozov A. Preprint ITEP N 163, M., 1988.
11. Marshakov A. V., Zabrodin A. V. Lebedev Inst. preprint N 54, M., 1989.

Поступила в редакцию 11 января 1989 г.