Краткие сообщения по физике № 7-1989 г.

УДК 517.946.4

ДВОЙНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕКЛУНДА УРАВНЕНИЯ ЛИУВИЛЛЯ

В.А. Андреев

Введено понятие двойного преобразования Беклунда. Найдена система уравнений, с которой это преобразование связывает два уравнения Лиувилля.

Уравнения, интегрируемые с помощью метода обратной задачи и обладающие преобразованиями Беклунда, можно представить в виде условия совместности двух линейных систем

$$\Psi_t = U(u)\Psi, \quad \Psi_x = V(u)\Psi. \tag{1}$$

Калибровочные преобразования этих систем используют для нахождения решений нелинейного уравнения методом одевания /1/, для систематического построения преобразований Беклунда для обычных уравнений /2/ и уравнений с нечетными суперпеременными /3/. Делают это следующим образом. Пусть наряду с уравнением, являющимся условием совместности системы (1), имеется и другое уравнение, являющееся условием совместности двух других линейных систем

$$\Psi'_t = U'(u')\Psi, \quad \Psi'_x = V'(u')\Psi'. \tag{2}$$

Системы (1) и (2) друг с другом не связаны, предполагается только, что размерность матриц U, V, U′ и V′ одинакова. Пусть также существует обратимая матрица $G(u, u')$, задающая калибровочные преобразования систем (1), (2), такая, что $\Psi' = G(u, u')\Psi$. Тогда из (1), (2) получаем, что матрица $G(u, u')$ удовлетворяет двум уравнениям соответственно по переменным t и x: $G_t = U'G - GU$, $G_x = V'G - GV$. В случае уравнения Лиувилля $\varphi_{xt} + e^{-2\varphi} = 0$ матрицы U, V имеют вид:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-2\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} \varphi_x & 1 \\ 0 & -\varphi_x \end{pmatrix}.$$

Компоненты матрицы $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ удовлетворяют следующим системам уравнений:

$$\alpha_t = -\beta e^{-2\varphi}, \ \beta_t = 0, \ \gamma_t = \alpha e^{-2\varphi'} - \delta e^{-2\varphi}, \ \delta_t = \beta e^{-2\varphi'} \tag{3}$$

и

$$\alpha_x = \alpha(\varphi' - \varphi)_x + \gamma, \ \beta_x = \beta(\varphi' + \varphi)_x + \delta - \alpha, \ \gamma_x = -\gamma(\varphi' + \varphi)_x, \ \delta_x = -\delta(\varphi' - \varphi)_x. \tag{4}$$

В дальнейшем удобно перейти к переменным Θ^α, Θ^β, Θ^γ, Θ^δ, которые определяются с помощью соотношений: $\Theta^\alpha = \ln\alpha$, $\Theta^\beta = \ln\beta$, $\Theta^\gamma = \ln\gamma$, $\Theta^\delta = \ln\delta$. Можно найти два решения систем (3), (4), дающие преобразования Беклунда уравнения Лиувилля.

Решение $\Theta^\alpha = \varphi' - \varphi$, $\Theta^\beta = 0$, $\Theta^\gamma = -\infty$, $\Theta^\delta = \varphi - \varphi'$ приводит уравнения (3), (4) к системе

$$(\varphi' - \varphi)_t = -e^{-(\varphi' + \varphi)}, \quad (\varphi' + \varphi)_x = e^{\varphi' - \varphi} - e^{-(\varphi' - \varphi)},$$

которая является преобразованием Беклунда, связывающим уравнение Лиувилля с самим собой.

Другое решение, определяемое условием $\alpha\delta = \beta\gamma$, приводит к уравнениям

$$(\Theta^\alpha - \Theta^\beta)_t = -e^{\Theta^\beta - \Theta^\alpha - 2\varphi}, \quad (\Theta^\beta - \Theta^\alpha - 2\varphi)_x = -e^{\Theta^\alpha - \Theta^\beta}$$

$$(\Theta^\gamma - \Theta^\alpha)_t = e^{\Theta^\alpha - \Theta^\gamma - 2\varphi'}, \quad (\Theta^\alpha - \Theta^\gamma - 2\varphi')_x = e^{\Theta^\gamma - \Theta^\alpha},$$

$$(\Theta^\gamma - \Theta^\alpha + \varphi')_{xt} = 0, \quad (\Theta^\alpha - \Theta^\beta + \varphi)_{xt} = 0,$$

которые являются преобразованиями Беклунда, связывающими уравнение Лиувилля со свободным уравнением Лапласа. Таким образом, видно, что хотя уравнения (3), (4) были построены с использованием двух уравнений Лиувилля, они содержат в себе и преобразования Беклунда, связывающие их с уравнением Лапласа.

Исключим из уравнений (3), (4) функции φ, φ' и найдем уравнения, которым удовлетворяют функции α, β, γ, δ сами по себе. Как и в случае цепочек Тоды /4/, это оказывается возможным только для некоторых линейных комбинаций переменных Θ и φ. Введем новые величины

$$\begin{aligned} A^1 &= \Theta^\delta - \Theta^\alpha - 2\varphi, \quad A^2 = \Theta^\beta - 2\Theta^\alpha + \Theta^\gamma - 2\varphi, \\ B^1 &= \Theta^\alpha - \Theta^\delta - 2\varphi', \quad B^2 = \Theta^\beta - 2\Theta^\delta + \Theta^\gamma - 2\varphi'. \end{aligned} \tag{5}$$

Из уравнений (3), (4) следует, что они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (A^1 - A^2)_{xt} &= -e^{A^1} + e^{A^2} - e^{B^1} + e^{B^2}, \quad (A^2 - B^1)_{xt} = 3e^{A^1} - 3e^{A^2} - e^{B^1} + e^{B^2}, \\ (B^1 - B^2)_{xt} &= -e^{A^1} + e^{A^2} + 3e^{B^1} - 3e^{B^2}, \quad (B^2 - A^1)_{xt} = -e^{A^1} + e^{A^2} + 3e^{B^1} - 3e^{B^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Системы уравнений (3), (4) связывают два уравнения Лиувилля для функций φ, φ' с системой (6), поэтому в дальнейшем будем называть их двойным преобразованием Беклунда. Подставляя в системы (3), (4) решения уравнений Лиувилля

$$\varphi = -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{f_x(x)\,g_t(t)}{(f(x)+g(t))^2}\right], \quad \varphi' = -\frac{1}{2}\ln\left[\frac{f'_x(x)\,g'_t(t)}{(f'(x)+g'(t))^2}\right],$$

можно проинтегрировать и найти значения функций $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$\alpha = (f_x)^{1/2}/(f+g)\,(f'_x)^{1/2}, \quad \beta = (f_x f'_x)^{-1/2},$$

$$\gamma = -(f_x f'_x)^{1/2}/(f+g)\,(f'+g'), \quad \delta = -(f'_x)^{1/2}/(f'+g')\,(f_x)^{1/2}.$$

Отсюда с помощью соотношений (5) можно найти решение системы (6)

$$A^1 = B^1 = \ln\left[-\frac{f'_x g_t}{(f+g)\,(f'+g')}\right], \quad A^2 = B^2 = \ln\left[-\frac{f_x g'_t}{(f+g)\,(f'+g')}\right]. \tag{7}$$

Из формул (5) следует соотношение $A^1 - A^2 = B^1 - B^2$. Пользуясь им и вводя новые переменные $u = B^1 - B^2$, $v = B^2 - A^1$, систему (6) можно свести к двум уравнениям

$$\begin{aligned} u_{xt} &= e^{A^1}(-1 - e^{u+v} + e^v + e^{-u}), \\ v_{xt} &= e^{A^1}(-1 + 3e^{u+v} - 3e^v + e^{-u}) \end{aligned} \tag{8}$$

для трех неизвестных функций A^1, u, v.

Таким образом, двойное преобразование Беклунда (3), (4) приводит к недоопределенным система (6), (8). Их частное решение имеет вид (7). Вопрос об их общей интегрируемости будет исследован в отдельной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Захаров В. Е. и др. Теория солитонов. Метод обратной задачи. М., Наука, 1980.
2. Kundu A. J. Phys. A: Math. Gen., 20, 1107 (1987).
3. Roy Chowdhury A., Roy S. J. Math. Phys., 27, 2464 (1986).
4. Андреев В. А. ТМФ, 75, 340 (1988).

Поступила в редакцию 22 декабря 1988 г.