Краткие сообщения по физике № 7-1989 г.

УДК 530.1

МЕТОД ПРОИЗВОДЯЩИХ ИНВАРИАНТОВ В ТЕОРИИ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫХ ГРУПП

А.Л. Шелепин, Л.А. Шелепин

На основе метода производящих инвариантов строятся ряды Клебша – Гордана исключительных групп.

Исключительные группы находят применение в атомной и ядерной спектроскопии, теории элементарных частиц. Однако их практическое использование часто затруднено отсутствием расчетных формул (в частности, для рядов и коэффициентов Клебша – Гордана (КГ)). Для рядов КГ имеются лишь численные таблицы /1, 2/. В то же время для неприводимых представлений (НП) классических групп (компактных и некомпактных) развит метод производящих инвариантов (ПИ), позволяющий получать формулы для рядов КГ в аналитическом виде /3, 4/. Целью настоящей работы является применение метода ПИ к исключительным группам и получение конкретных формул для рядов КГ.

В отличие от классических исключительные группы Ли не определяются квадратичным инвариантом; наряду с ним необходимо задать еще и инвариант третьей (G_2, F_4, E_6, E_8) или четвертой степени (E_7). Для уяснения структуры инвариантов выпишем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &SU(3) \subset G_2 \subset SO(7), && SU(8) \subset E_7 \subset Sp(56), \\ &SO(9) \subset F_4 \subset SO(26), && SU(9) \subset E_8 \subset SO(248). \\ &SU(2) \oplus SU(6) \subset E_6 \subset SU(27). && \end{aligned} \qquad (1)$$

Квадратичный инвариант представляет собой инвариант групп, написанных в (1) справа, другой строится из инвариантов подгрупп. Инвариант третьей степени дает возможность ввести для групп G_2 /5, 6/, F_4, E_8 векторное произведение (для E_6 такая возможность отсутствует ввиду несамосопряженности представлений; в разложение прямого произведения НП наименьшей размерности войдет не такое же представление, а ему сопряженное).

Для применения метода ПИ необходимо построить полиномиальный базис представлений исключительных групп. Остановимся подробнее на примере группы E_6; фундаментальное представление объединяет 27 комплексных переменных u_i /5, 6/; $x_p, y_p, z^{pq} = -z^{qp}$ $p,q = 1, 2, ..., 6$ (x_p и y_p преобразуются по НП (10000), z^{pq} – по НП (00010) подгруппы $SU(6)$. Инварианты представляют собой суммы $SU(6)$-инвариантов:

квадратичный

$$x_p x^p + y_p y^p + z_{pq} z^{pq} = u_i v^i \quad i = \overline{1,27}, \; p, q = \overline{1,6};$$

кубический /5, 6/

$$x_p y_q z^{pq} - \epsilon_{pqstrm} z^{pq} z^{st} z^{rm} \equiv \Gamma^{ikl} u_i v_k w_l.$$

Симметрический базис всех фундаментальных НП неизбыточен, компоненты базиса u_{ik}, $u^{ikl} = \Gamma^{ikl}\Gamma^{ksl}u_{mns}$, u^{ik} антисимметричны по своим индексам. Для задания полного набора инвариантов необходимо ввести также тензор Γ^{ia}_{k}, $i, k = \overline{1,27}$, $a = \overline{1,78}$, задающий переход между различными системами индексов (u_a-базис 78-мерного присоединенного представления), после чего можно переходить непосредственно к построению рядов КГ. ПИ

$$(u_i w^i)^{P_1 - S_1 - S_2} (v_i w^i)^{P_2 - S_1 - S_2} (\Gamma^{ikl} u_i v_k w_l)^{S_2} (u_i\, v_k w^{ik})^{S_1}$$

отвечает ряду (2)

$$(P_1 0\overset{0}{0}00) \otimes (P_2 0\overset{0}{0}00) = \sum_{S_1, S_2} (P_1 + P_2 - 2S_1 - 2S_2\ S_1\ \overset{0}{0}\ 0\ S_2),\ S_1 + S_2 \leqslant \min\{P_1, P_2\}, \qquad (2)$$

ПИ $(u_1 w^i)^{P_1 - a - S} (v^i w_i)^{P_2 - a - S} (u_i v^i)^{a} (u_i v^k \Gamma^{ia}_{k}\, w_a)^S$ – ряду (3)

$$(P_1 0\overset{0}{0}00) \otimes (00\overset{0}{0}0P_2) = \sum_{a, S} (P_1 - S - a\ \ 0\overset{S}{0}\ 0\ P_2 - S - a),\ a + S \leqslant \min\{P_1, P_2\}. \qquad (3)$$

Здесь и ниже расположение индексов сигнатуры НП исключительных групп соответствует схемам Дынкина (рис. 1). Другие полученные методом ПИ ряды КГ группы E_6 даются формулами (6) и (7). Отметим, что в ряду (7) есть кратные представления.

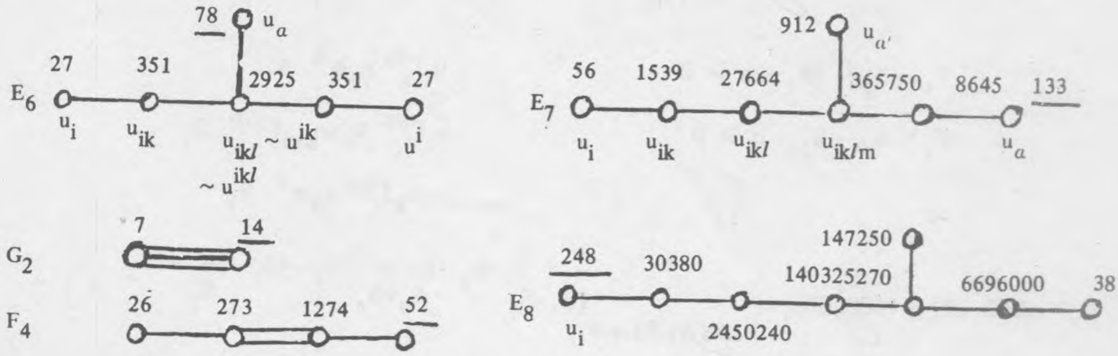

Рис. 1. Схемы Дынкина. Над вершинами проставлены размерности соответствующих фундаментальных НП. Размерности присоединенных представлений подчеркнуты.

Вид базисов НП $(100\overset{0}{0}00)$, ..., $(000\overset{0}{1}00)$ группы E_7 совпадает с видом базисов НП(1000...),...,(00010...) группы Sp(56). Наряду с инвариантом $\gamma_{ik} u^i v^k$ симплектической группы имеется инвариант четвертой степени /5. 6/:

$$x_{ik} x_{lm} x^{il} x^{km} + \epsilon_{iklmnstr} (x^{ik} x^{lm} x^{ns} x^{tr} + x_{ik} x_{lm} x_{ns} x_{tr}),$$

$$x_{ik} = - x_{ki},\ \ x^{ik} = - x^{ki},\ \ i = \overline{1,8},$$

где x_{ik} и x^{ik} образуют базисы НП(0100000) и (0000010) подгруппы SU(8). Для перехода между различными системами индексов необходимо ввести тензор Γ_{ika}, где $a = \overline{1,133}$ – индекс, нумерующий базисные функции присоединенного представления и $\Gamma_{iaa'}$, a' – индекс базисных функций представления $(000\overset{1}{0}00)$. По индексу a свертка производится не с помощью тензора симплектической группы γ_{ik}, а с помощью тензора ортогональной группы SO(133) $\delta_{a\beta}$ /1/. Полученные методом ПИ ряды КГ исключительных групп даются формулами (4) – (10) (в некоторых случаях указаны соответствующие фундаментальные инварианты и их степени).

$$G_2: (P_1 0) \otimes (P_2 0) = \sum_{a,a',S,S_1} (P_1 + P_2 - a' - 2a - 2S - 2S_1 \quad S + S_1) \tag{4}$$

$$P_1 - a' - a - S - 2S_1' - S_1'' \geqslant 0 \qquad S_1' + S_1'' = S_1$$

$$P_2 - a' - a - S - S_1' - 2S_1'' \geqslant 0$$

$$F_4: (P_1 000) \otimes (P_2 000) = \sum_{a,a',S,S_1,S_2,S_3} (P_1 + P_2 - a' - 2a - 2S - 3S_1 - 2S_2 - 4S_3 \quad S + S_1 \quad S_3 \quad S_2)$$

$$P_1 - a' - a - S - 2S_1' - S_1'' - S_2 - 2S_3 \geqslant 0 \quad S_1' + S_1'' = S_1 \tag{5}$$

$$P_2 - a' - a - S - S_1' - 2S_1'' - S_2 - 2S_3 \geqslant 0$$

$$E_6: (P_1 0\overset{0}{0}00) \otimes (000\overset{P_2}{0}0) = \sum_{a,S_1,S_2} (P_1 - S_1 - 2S_2 \quad S_2 \quad \overset{P_2 - S_1 - S_2 - a}{0} \quad S_1 \quad 0) \tag{6}$$

$$P_1 - S_1 - 2S_2 - a \geqslant 0 \qquad u_i \Gamma_k^{ia} v_a w^k, \ a$$

$$P_2 - S_1 - S_2 - a \geqslant 0 \qquad u_i \Gamma_l^{ka} v_a w_{km} \Gamma^{ilm}, \ S_1$$

$$u_i u_k \Gamma_l^{ka} v_a w^{il}, \ S_2$$

$$(000\overset{P_1}{0}0) \otimes (000\overset{P_2}{0}0) = \sum_{S_1,S_2,S_3,S_3',a,a'} (S_1 \quad S_2 \quad \overset{P_1+P_2-2a-a'-2S_1-4S_2-2S_2-3S_3'}{S_3+S_3'} \quad \overset{2}{S_2} \quad S_1)$$

$$P_1 - a - a' - S_1 - 2S_2 - S_3 - 2S_3'' - S_3''' \geqslant 0 \qquad S_3'' + S_3''' = S_3' \tag{7}$$

$$P_2 - a - a' - S_1 - 2S_2 - S_3 - S_3'' - 2S_3''' \geqslant 0$$

$$E_7: (P_1 0\overset{0}{0}000) \otimes (P_2 0\overset{0}{0}000) = \sum_{a,S_1,S_2} (P_1 + P_2 - 2a - 2S_1 - 2S_2 \quad S_1 \, 0 \, \overset{0}{0} \, 0 \, S_2)$$

$$P_1 - a - S_1 - S_2 \geqslant 0 \qquad \gamma_{ik} u^i v^k = u_i v^k, \ a$$

$$P_2 - a - S_1 - S_2 \geqslant 0 \qquad u_i v_k w^{ik}, \ S_1 \qquad u_i v_k \Gamma^{ika} w_a, \ S_2$$

$$(P_1 0\overset{0}{0}000) \otimes (000\overset{0}{0}0P_2) = \sum_{a,S_1,S_2} (P_1 - S_1 - 2S_2 \quad S_2 \, 0 \, \overset{S_1}{0} \, 0 \quad P_2 - a - S_1 - S_2)$$

$$P_1 - S_1 - 2S_2 - a \geqslant 0 \qquad u_i v_a w_k \Gamma^{ika}, \ a \quad u_i u^k v_a \Gamma^{ila} w_{kl}, \ S_2$$

$$P_2 - S_1 - S_2 - a \geqslant 0 \qquad u_i v_a w_{a'} \Gamma^{iaa'}, \ S_1$$

$$(P_1 0\overset{0}{0}000) \otimes (000\overset{P_2}{0}00) = \sum_{a,S_1,S_2,S_3,S_4,S_5} (P_1 - S_1 - S_2 - S_3 - 2S_4 - 2S_5 - 2a \;\; S_2 \;\; \overset{P_2 - S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - 2S_5}{S_4} \;\; S_5 \;\; S_3 \;\; S_1)$$

$$P_1 - S_1 - S_2 - S_3 - 2S_4 - 2S_5 - 2a \geqslant 0 \qquad (8)$$

$$P_2 - S_1 - S_2 - S_3 - S_4 - 2S_5 - a \geqslant 0$$

$$(000\overset{0}{0}0P_1) \otimes (000\overset{0}{0}0P_2) = \sum_{a,a_1,S_1,S_2,S_3,S_4} (0 \; S_3 \; 0 \; \overset{0}{S_4} \; S_1 + S_2 \; P_1 + P_2 - a - 2a_1 - 2S_1 - 3S_2 - 2S_3 - 4S_4)$$

$$P_1 - a - a_1 - S_1 - S_2' - 2S_2'' - S_3 - 2S_4 \geqslant 0 \qquad S_2' + S_2'' = S_2$$

$$P_2 - a - a_1 - S_1 - 2S_2' - S_2'' - S_3 - 2S_4 \geqslant 0$$

$\delta^{\alpha\beta} u_\alpha v_\beta = u_\alpha v^\alpha, \; a_1$ $\qquad$ $u_\alpha v_\beta \Gamma^{\alpha\beta\gamma} \Gamma_{ik\gamma} w^{ik}, \; S_3$

$\Gamma^{\alpha\beta\gamma} u_\alpha v_\beta w_\gamma, \; a$ $\qquad$ $u_\alpha v^\beta v_\gamma \Gamma^{\alpha\delta\gamma} w_{\beta\delta}, \; S_2''$

$u_\alpha v_\beta w^{\alpha\beta}, \; S_1$ $\qquad$ $u_\alpha u^\beta v_\gamma v^\delta w^{\alpha\gamma\rho} \Gamma_{\beta\delta\rho}, \; S_4$

$$E_8 : (P_1 000\overset{0}{0}00) \otimes (P_2 000\overset{0}{0}00) = \sum_{a,a_1,S_1,S_2,S_3,S_4} (P_1 + P_2 - a - 2a_1 - 2S_1 - 3S_2 - 2S_3 - 4S_4 \;\; S_1 + S_2 \;\; S_4 \; 0 \; \overset{0}{0} \; 0 \; S_3)$$

$$P_1 - a - a_1 - S_1 - S_2' - 2S_2'' - S_3 - 2S_4 \geqslant 0 \qquad S_2' + S_2'' = S_2$$

$$P_2 - a - a_1 - S_1 - 2S_2' - S_2'' - S_3 - 2S_4 \geqslant 0 \qquad (9)$$

$u_i v^i, \; a_1$ $\qquad$ $u_i v_k w_l \Gamma^{ikl}, \; a$ $\qquad$ $u_i u^k v_l w_{mk} \Gamma^{ilm}, \; S_2'$

$u_i v_k w^{ik}, \; S_1$ $\qquad$ $u_i u^k v_l v^m w^{ils} \Gamma_{kms}, \; S_4$

ЛИТЕРАТУРА

1. W y b o u r n B. G., B o w i c k M. J. Aust. J. Phys., **30**, № 3, 259 (1977).
2. W y b o u r n B. G. Aust. J. Phys., **32**, № 5, 417 (1979).
3. Теоретико-групповые методы в физике. Труды ФИАН, **70**, (1973).
4. Ш е л е п и н А. Л., Ш е л е п и н Л. А. Труды ФИАН, **191**, 46 (1989).
5. C a r t a n E. Ann. Ecole Normale Sup. 3 serie, **31**, 263 (1914).
6. Г а н т м а х е р Ф. Р. Матем. сб., **5**, 101 (1939).

Поступила в редакцию 9 марта 1989 г.