УДК 530.14

О СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЯХ ВИДОИЗМЕНЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Н. А. Жура, А. Н. Ораевский

Получен широкий класс точных решений видоизмененного нелинейного уравнения Шредингера

$$u_{tt} + 2iku_t + u_{xx} + 2\kappa_0|u|^2u = 0,\ k > 0,$$

со специальными начальными условиями. Среди решений имеются как солитоны (регулярные и сингулярные), так и их периодические аналоги. Использование указанного уравнения представляется целесообразным при изучении динамики коротких импульсов фемтосекундного диапазона и ниже, когда приближение "медленно меняющейся амплитуды" становится непригодным и, тем самым, нельзя пренебречь первым слагаемым в уравнении. Показано, как учет слагаемого u_{tt} влияет на решение.

Значимость проблемы распространения ультракоротких (фемтосекундного диапазона и ниже) импульсов в среде с нелинейным показателем преломления общеизвестна. Имеются и различные подходы к ее решению. При этом следует подчеркнуть, что использование так называемого приближения "медленно меняющейся амплитуды" [1, 2] (применяются и другие термины – приближение "параболического уравнения", приближение "квазиоптики" и т.д.) здесь не является вполне адекватным рассматриваемому явлению, что отмечалось уже в ранних работах этого направления исследований [3, 4]. Это приближение связано с отысканием решения уравнения (нелинейное уравнение Шредингера [5, 6])

$$2iku_t + u_{xx} + 2\kappa_0|u|^2u = 0, \quad k > 0, \tag{1}$$

где $u(t,x)$ – комплексная огибающая электрического поля. Здесь коэффициент $\kappa_0 \neq 0$ связан с величиной k и коэффициентом n преломления среды соотношением $\kappa_0 = k^2(n-n_0)/n_0$. При этом изменение коэффициента преломления, вызванное приложенным электрическим полем, предполагается следующим:

$$n = n_0 + \delta n|u|^2.$$

Другими словами, среда предполагается обладающей керровской нелинейностью коэффициента преломления.

Уравнение (1) получают обычно из уравнения

$$u_{tt} + 2iku_t + u_{xx} + 2\kappa_0|u|^2u = 0 \tag{2}$$

в предположении, что первое слагаемое в (2) можно опустить, поскольку величина $|u_{tt}|$ пренебрежимо мала по сравнению с $2k|u_t|$. Имеется много способов "оправдания" этого приближения, восходящего, по-видимому, к Фоку и Леонтовичу. Одно из них принадлежит самому Фоку [7], полагавшему, что приближенными уравнениями иногда проще описать явление, не теряя его сути, нежели точным. Более естественное, с физической точки зрения, оправдание принадлежит Шену, утверждающему [1, с. 61–62], что истинный смысл приближения состоит в "пренебрежении распространяющейся в противоположном направлении компонентой поля".

В настоящей заметке найден достаточно широкий класс решений (модифицированного) нелинейного уравнения Шредингера (2). Поскольку аналогичные решения имеются и у уравнения (1), то возникает возможность сравнения этих решений и, в частности, величин $|u_{tt}|$ и $2k|u_t|$, т.е. явной проверки приближения медленно меняющейся амплитуды. Средства метода обратной задачи рассеяния [6] при этом не используются.

Автомодельные решения уравнения (2). Нетрудно видеть, что уравнение (2) (равно как и уравнение (1)) допускает ограниченные решения вида

$$u(t,x) = u_0 e^{i\varphi(t,x)}, \tag{3}$$

где фазовая функция $\varphi(t,x)$ линейна по t и x :

$$\varphi(t,x) = \alpha t + \beta x. \tag{4}$$

При этом правая часть (3) удовлетворяет уравнению (2) только в том случае, когда комплексная u_0 и вещественные α и β постоянные связаны соотношением

$$|u_0|^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha k)/2\kappa_0. \tag{5}$$

Линейная комбинация решений вида (3) уже не будет решением уравнения (2), что, впрочем, является следствием нелинейности (2).

Обобщая (3), ищем решения уравнения (2) в виде

$$u(t,x) = v(t,x)e^{i\varphi(t,x)}, \tag{6}$$

где $\varphi(t,x)$ та же, что и в (4). Функция, совпадающая с правой частью (6), будет решением (2), если $v(t,x)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} v_{tt} + v_{xx} - \delta_0 v + 2\kappa_0 v^3 = 0, \\ (\alpha + k)v_t + \beta v_x = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где постоянная $\delta_0 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha k$.

Если $\alpha = -k$, то $\delta_0 = \beta^2 - k^2$, а v не зависит от x и является, как функция переменной t, решением нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$y'' - \delta_0 y + 2\kappa_0 y^3 = 0, \tag{8}$$

известного как уравнение ангармонического осцилятора. Решения, не зависящие от переменной x, не представляют интереса.

При $\alpha \neq -k$ второе из уравнений (7) принимает форму

$$v_t + \omega_0 v_x = 0, \quad \omega_0 = \beta/(\alpha + k), \tag{9}$$

а первое, с учетом (9), приводится к (параметрическому, по параметру t) уравнению ангармонического осциллятора

$$\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} - \delta v(t,x) + 2\kappa v^3(t,x) = 0, \quad t > 0, \quad x \in, \tag{10}$$

где постоянные

$$\delta = \delta_0/(1 + \omega_0^2), \quad \kappa = \kappa_0/(1 + \omega_0^2). \tag{11}$$

Поскольку уравнение (10) является, при фиксированном t, уравнением ангармонического осциллятора, то, поступая известным образом, приводим его, в предположении $v/x \neq 0$, к интегрированию нелинейного уравнения первого порядка

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 - \delta v^2 + \kappa v^4 + a = 0, \tag{12}$$

где a – произвольная функция переменной t. Если она постоянна, то в зависимости от соотношений между постоянными δ, κ и a решение уравнения (12) выражается в элементарных, тригонометрических, гиперболических или эллиптических функциях.

При этом убывающие на бесконечности по переменной x решения называем солитонами (регулярными, если они ограничены, и сингулярными в противном случае). Другой класс решений составляют периодические решения, которые также могут быть либо ограниченными (регулярные цуги волн), либо неограниченными (сингулярные цуги волн).

Заметим, что, на наш взгляд, не следует рассматривать сингулярные солитоны как нефизические объекты, поскольку они могут быть также полезны, как и сингулярные потенциалы (кулоновский потенциал) в уравнении Шредингера.

Поскольку, как уже отмечалось выше, все решения (12) хорошо известны, то ограничимся, как иллюстрацией, лишь некоторыми из характерных решений.

Среди решений уравнения (2), являющихся регулярными солитонами при $a = 0$, $\delta > 0$, $\kappa > 0$

$$u(t,x) = \sqrt{\cdot\,\kappa}\frac{e^{i(\alpha t + \beta x)}}{\sqrt{\delta}(x - x_0 - \omega_0 t)}, \tag{13}$$

имеются также сингулярные решения вида

$$u(t,x) = \frac{e^{i(\alpha t + \beta x)}}{\sqrt{-\kappa}(x - x_0 - \omega_0 t)} \text{ при } \kappa < 0,\ \delta = 0,$$

$$u(t,x) = \sqrt{-\frac{\delta}{\kappa}}\frac{e^{i(\alpha t + \beta x)}}{\sqrt{}}$$

(x-x$_0 - \omega_0 t$) при $\kappa < 0$, $\delta > 0. Еслиже \kappa < 0$ и $\delta < 0$, то имеется решение

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{\delta}{\kappa}}\frac{e^{i(\alpha t + \beta x)}}{\sin\sqrt{-\delta}(x - x_0 - \omega_0 t)}$$

и аналогичное решение, где синус в знаменателе заменен на косинус.

При $a \neq 0$ решений солитонного типа нет, но имеются периодические решения, выражающиеся, в зависимости от значения параметра $\Delta = \delta^2/4\kappa^2 - a/\kappa$, либо через гиперболические функции при $\Delta = 0$, и в этом случае уравнение (12) имеет вид

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = -\kappa\left(v^2 - \frac{\delta}{2\kappa}\right)^2,$$

либо через эллиптические функции. Если же $\Delta < 0$, то функция v неявно выражается через эллиптическую функцию dn, а если $\Delta > 0$, то имеются периодические решения, как ограниченные, так и неограниченные. Например, в последнем случае, поскольку корни полинома $v^4 - \frac{\delta}{\kappa}v^2 + \frac{a}{\kappa}$ вещественны, скажем один из них $-v_1^2$ отрицателен, а другой v_2^2 положителен, то при $\kappa > 0$ имеем:

$$u(t,x) = v_2 e^{i(\alpha t+\beta x)}(\sqrt{\kappa(v_1^2+v_2^2)}(x - x_0 - \omega_0 t),), = v_2/\sqrt{v_1^2+v_2^2},$$

а при $\kappa < 0$

$$u(t,x) = v_2\frac{e^{i(\alpha t+\beta x)}}{(\sqrt{\kappa(v_1^2+v_2^2)}(x - x_0 - \omega_0 t),)}, \quad = v_1/\sqrt{v_1^2+v_2^2}.$$

Здесь – модуль эллиптического косинуса.

Общим свойством всех решений является тот факт, что величина $|u(t,x)|$ сохраняет свое значение в точках прямой

$$x - x_0 - \omega_0 t = \mathrm{const}.$$

Что касается закона "взаимодействия" соответствующих этим решениям объектов, то его следует рассматривать как закон сложения точек на алгебраической кривой, которая может быть ассоциирована с соответствующим уравнением.

Все результаты остаются в силе и для нелинейного уравнения Шредингера (1), с тем лишь изменением, что под постоянными δ_0 и ω_0 следует понимать, соответственно $\beta^2 + 2\alpha k$ и β/k.

Таким образом показано, что нет необходимости устранять из уравнения (2) слагаемое u_{tt}, приводя его к уравнению (1). Это дает возможность применять уравнение (2) при изучении распространения ультракоротких импульсов в среде с керровской нелинейностью показателя преломления.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш е н И. Р. Принципы нелинейной оптики. М., Мир, 1989.

[2] Л е о н т о в и ч М. А., Ф о к В. А. Исследования по распространению радиоволн. Под ред. Б. А. Введенского, (сборник 2), с. 13-39, М., изд-во АН СССР, 1948.

[3] А х м а н о в С. А., С у х о р у к о в А. П., Х о х л о в Р. В. УФН, **93**, 19 (1967).

[4] А х м а н о в С. А., В ы с л о у х В. А., Ч и р к и н А. С. УФН, **149**, N 3, 450 (1986).

[5] З а х а р о в В. Е., Ш а б а т А. Б. ЖЭТФ, **61**, N 1, 118 (1971).

[6] З а х а р о в В. Е., М а н а к о в С. В., Н о в и к о в С. П., П и т а е в с к и й Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. Под ред. С. П. Новикова. М., Наука, 1980.

[7] Ф о к В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., Советское радио, 1970.

Поступила в редакцию 22 февраля 2003 г.