

ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНОЙ МОРСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Т.Б. Шевченко, И.В. Шуган

На основе модели нелинейного случайного поля рассчитаны характеристики случайной поверхности: средняя плотность пересечений заданного уровня; среднее число точек заданного уклона на единицу длины.

В последние годы активно разрабатываются лазерные методы дистанционного измерения характеристик морского волнения. Они позволяют выполнять измерения с высоким пространственным разрешением; их применение, в отличие от традиционных оптических методов, не зависит от условий естественного освещения.

Характеристики морской поверхности при лазерном зондировании определяются из анализа зеркально отраженного лазерного излучения. В выполненных ранее работах /1/ предполагалось, что для описания поверхности применима гауссова статистика. Однако такой подход применим при сравнительно слабом волнении, когда уклоны морской поверхности невелики. При сильном волнении для описания статистических свойств морской поверхности необходим учет нелинейных поправок.

Статистические модели случайной морской поверхности, учитывающие нелинейные взаимодействия между спектральными компонентами, предложены в /2 – 4/. Учет нелинейности в модели /2/ требует сложных и громоздких численных расчетов. Модель случайного нелинейного волнового пакета, основанная на разложении Стокса /3/, обладает достаточной наглядностью и позволяет детально исследовать различные статистические характеристики волнения.

В настоящей работе на основе модели нелинейного случайного поля /3/ изучаются характеристики случайной поверхности, которые могут быть измерены в экспериментах по дистанционному лазерному зондированию: средняя плотность пересечений заданного уровня N_{lev} ; среднее число точек заданного уклона на единицу длины N_s .

Узкий волновой пакет гравитационных волн задается разложением Стокса со случайными параметрами /3/ $\xi = (1/2)a^2k + a\cos\chi + (1/2)a^2k\cos 2\chi + (3/8)a^3k^2\cos 3\chi + \dots$, где a – амплитуда волны; k – волновой вектор; $\chi = kx - nt + \varphi$; n – частота; φ – фаза. Амплитуда волны a предполагается случайной, непрерывно распределенной величиной, подчиняющейся закону Рэлея, фаза φ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$.

Введем случайные нормированные величины: $z_1 = a \cos\chi / (a^2/2)^{1/2}$; $z_2 = a \sin\chi / (a^2/2)^{1/2}$ (a^2 – среднее квадратичное значение a); $h = \xi/\sigma$; $h_x = \xi_x/\delta$ ($\delta = \sigma k$); $h_{xx} = \xi_{xx}/k\delta$; $N = \sigma / (a^2/2)^{1/2}$; $\sigma = (\overline{\xi^2} - \overline{\xi}^2)^{1/2}$. Поскольку z_1 и z_2 являются независимыми функциями, их совместное распределение имеет вид:

$$p(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2)\right]. \quad (1)$$

Для подсчета средней плотности точек заданного уровня $h = h_0$ воспользуемся выражением, полученным в /5/:

$$N_{lev}(h_0) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi, \xi_x) \Big|_{\xi=h_0} |\xi_x| d\xi_x = \sigma^2 k^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(h, h_x) \Big|_{h=h_0} |h_x| dh_x, \quad (2)$$

где $p(\xi, \xi_x)$ — совместная плотность распределения вероятности величин ξ, ξ_x ; $p(h, h_x)$ — величин h, h_x . В [3] получена совместная плотность распределения вероятности $p(h, h_x)$, которая с точностью до второго порядка малости по δ может быть записана в виде

$$p(h, h_x) = \frac{N^2}{2\pi k} (2k\delta - 1)^2 \exp\left[-\frac{1}{2} N^2 [(h - \delta h^2)^2 + ((-h_x/k) + 2\delta h h_x)^2]\right]. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2) и производя интегрирование, получим:

$$N_{lev}(h_0, \xi) = (k/\pi) \exp\left[-\frac{1}{2} h_0^2 (1 - 2\pi\xi h_0)^2\right], \quad (4)$$

где $\delta = 2\pi\xi$. Здесь учтено, что с точностью до второго порядка малости по δ , $N = 1$.

Полученная зависимость (4) имеет три экстремума: максимумы в точках $h_{01} = 0, h_{02} = 1/\delta$ и минимум при $h_{03} = 1/2\delta$. Однако h_{02} не имеет реального смысла, поскольку лежит за пределами применимости принятой модели, т.к. предельная крутизна волн Стокса подчинена условию [6] $(hk/2\pi) < 1/4\sqrt{3} \approx 0,144$.

На рис. 1 представлены зависимости $N_{lev}(h_0, \xi)$ для различных значений ξ . Видно, что в случае $\xi = 0$ (что соответствует линейной гауссовой модели поля) зависимость $N_{lev}(h_0, \xi)$ симметрична относительно знака h_0 : $N(h_0) = N(-h_0)$. Для нелинейного поля симметрия функций $N_{lev}(h_0, \xi)$ нарушается: при $h_0 > 0$ средняя плотность пересечений уровня h_0 для нелинейной модели превышает соответствующее значение для линейного приближения. С ростом значений параметра нелинейности ξ различие увеличивается (рис. 1). Наблюдение в эксперименте несимметричности в зависимости $N_{lev}(h_0)$ может служить критерием наличия указанной нелинейности.

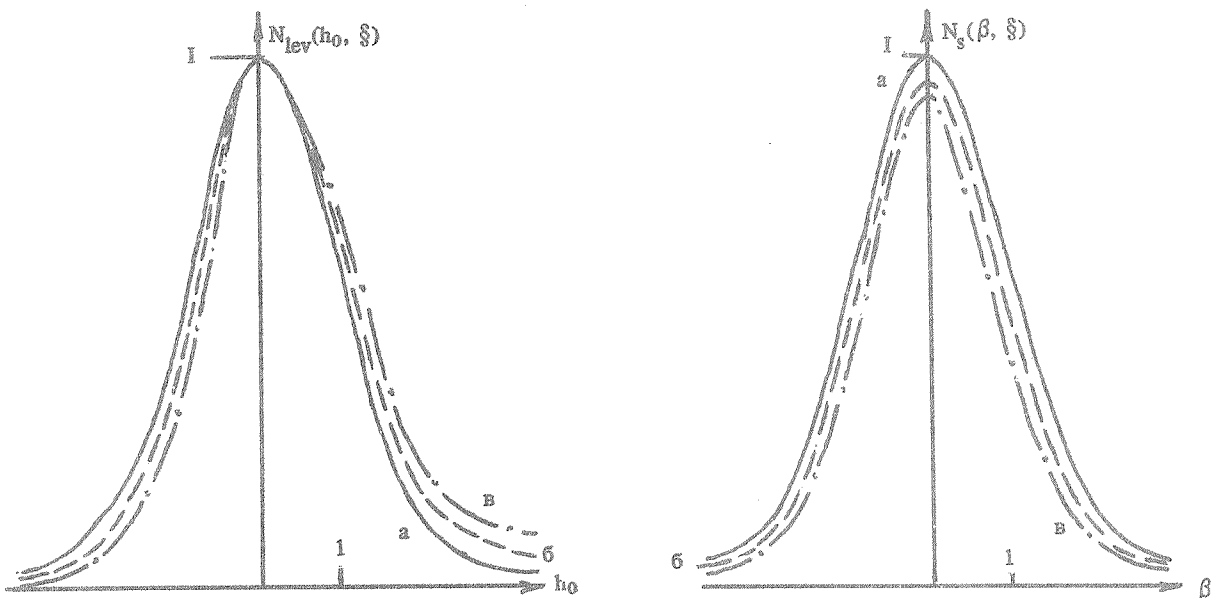


Рис. 1. Средняя плотность пересечений заданного уровня h_0 для различных значений параметра нелинейности $\xi = 0$ (а); $0,5 \cdot 10^{-2}$ (б); $2 \cdot 10^{-2}$ (в).

Рис. 2. Среднее число точек заданного уклона β на единицу длины для различных значений параметра нелинейности $\xi = 0$ (а); $0,5 \cdot 10^{-2}$ (б); $0,8 \cdot 10^{-2}$ (в).

Рассмотрим теперь среднее число точек поверхности заданного уклона $h_x = \beta$, которое дается выражением:

$$N_s(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_x, \xi_{xx}) |_{\xi_x = \sigma k \beta} | \xi_{xx} | d\xi_{xx} = k^4 \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} p(h_x, h_{xx}) |_{h_x = \beta} | h_{xx} | dh_{xx}. \quad (5)$$

Здесь $p(\xi_x, \xi_{xx})$ — совместная плотность распределения вероятности величин ξ_x, ξ_{xx} , $p(h_x, h_{xx})$ — величин h_x, h_{xx} . Выразим z_1 и z_2 через h_x, h_{xx} с точностью до второго порядка малости по δ (в этом случае $N = 1$)

$$z_1 = -N h_{xx} - 2N \delta h_{xx}^2 + 2N \delta h_x^2 = -h_{xx} - 2\delta h_{xx}^2 + 2\delta h_x^2,$$

$$z_2 = -N h_x - 2N \delta h_x h_{xx} = -h_x - 2\delta h_x h_{xx},$$

и перейдем в (1) от переменных z_1, z_2 к переменным h_x, h_{xx} . Тогда

$$p(h_x, h_{xx}) = \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\left(\frac{1}{2} h_x^2 + 2h_x^4\right)\right] \left[1 + 6\delta h_{xx}\right] \exp\left[-\left(\frac{1}{2} h_{xx}^2 + 2\delta h_{xx}^3 + 2\delta^2 h_{xx}^4 - 2\delta^2 h_x^2 h_{xx}^2\right)\right]. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и произведя интегрирование с использованием приближенного метода наискорейшего спуска, для среднего числа точек заданного уклона $h_x = \beta$ на единицу длины имеем:

$$N_s(\beta, \delta) = \frac{k}{2\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\beta^2}{a} + 2\delta^2 \beta^4\right)\right] \left\{ \exp\left[-\left(\frac{1}{2} - 11\delta^2\right)\right] [(1 + 3\delta + (2\beta^2 - 35,5)\delta^2) \times \right. \\ \times \exp(-5\delta) + (1 - 3\delta + 2(\beta^2 - 35,5)\delta^2) \exp(5\delta)] + \exp\left[-(1 - 44\delta^2)\right] 12\delta [(1 + 6\sqrt{2}\delta + 4(\beta^2 - 31)\delta^2) \times \\ \times \exp(-10\sqrt{2}\delta) - (1 - 6\sqrt{2}\delta + 4(\beta^2 - 31)\delta^2) \exp(10\sqrt{2}\delta)] \left. \right\}.$$

На рис. 2 представлены зависимости $N_s(\beta, \delta)$ для различных значений $\delta = 2\pi \xi$. Случай $\xi = 0$ соответствует линейной гауссовой модели поля. С ростом параметра нелинейности ξ наблюдается отклонение от гауссовой модели, заключающееся в уменьшении значений $N_s(\beta, \delta)$ по сравнению с линейным случаем. Эффекты нелинейности наиболее выражены для плотности зеркальных точек с уклоном, близким к нулевому. Относительное отклонение от линейной модели может достигнуть 10% для умеренных значений параметра нелинейности $\xi \sim 10^{-2}$, что делает доступным экспериментальное наблюдение такого рода эффектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бункин Ф. В. и др. Труды ИОФАН, т. 1, М., Наука, 1986, с. 2.
2. Lonquet-Higgins M. S. J. Fluid Mech., 17, 459 (1963).
3. Huang N. E. et al. J. Geophys. Res., 89, 1961 (1984).
4. Taufun M. A. J. Geophys. Res., 85, 1548 (1980).
5. Rice S. Bell Syst. Techn. J., 23, 282 (1944).
6. Океанология, т. 2, Физика океана, под ред. Каменковича В.М., Моница А.С., М., Наука, 1978.

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 14 сентября 1987 г.