Краткие сообщения по физике № 2-1988 г.

УДК 533.95

АЗИМУТАЛЬНО НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТОКОВЫЕ СТРУКТУРЫ В Z-ПИНЧЕ

С.В. Буланов

Обсуждаются магнитогидродинамические кумулятивные течения, возникающие при сжатии и расширении Z-пинчей. Показано, что азимутально симметричные течения неустойчивы. Нелинейная стадия неустойчивости описывается автомодельными решениями уравнений МГД, демонстрирующими образование за конечное время квазиодномерной особенности.

В работе /1/ указывается, что возникновение квазиодномерных токовых структур имеет принципиальное значение для выяснения механизма генерации быстрых частиц в Z-пинчах. Равновесный Z-пинч в МГД приближении устойчив относительно таких возмущений. Ниже показано, что в процессе сжатия или расширения пинча цилиндрически симметричные движения неустойчивы, и прослежена нелинейная стадия этой неустойчивости.

Используем систему координат, ось z которой направлена вдоль электрического тока в пинче. Магнитные силовые линии и вектор скорости плазмы лежат в плоскости x, y. На оси пинча $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ обращаются в нуль, поэтому в ее окрестности можно представить их зависимости от координат и времени в виде

$$\begin{aligned} v_x &= w_{11}(t)x + w_{12}(t)y, \quad v_y = w_{21}(t)x + w_{22}(t)y, \\ B_x &= A_{11}(t)x + A_{12}(t)y, \quad B_y = A_{21}(t)x + A_{22}(t)y. \end{aligned} \tag{1}$$

Плотность плазмы зависит только от времени: $\rho(t)$. Подставим эти выражения в уравнения магнитной гидродинамики

$$\partial_t\rho + \mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad \partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = [\mathrm{rot}\,\mathbf{B}, \mathbf{B}]/4\pi\rho, \quad \partial_t\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,[\mathbf{v}, \mathbf{B}], \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0,$$

в которых пренебрежено эффектами газового давления. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для компонент матриц $w_{ij}(t)$, $A_{ij}(t)$ и $\rho(t)$. Эти уравнения анализировались в /2, 3/, где показано, что замена $w_{ij}(t) = \dot{M}_{ik}M^{-1}_{kj}$ сводит их к системе

$$\ddot{M}_{ij} = -\frac{(M_{ik}A_{kl}(0)M^{-1}_{lm} - M_{mk}A_{kl}(0)M^{-1}_{li})M_{mn}A_{nj}(0)}{4\pi\rho(0)\det(M_{ij})}. \tag{2}$$

Здесь $A_{kl}(0)$ и $\rho(0)$ — соответственно начальные значения матрицы A_{kl} и плотности плазмы ρ; точка обозначает дифференцирование по времени. Зависимость A_{ij} и ρ от времени находится по формулам /2, 3/: $A_{ij}(t) = M_{ik}A_{kl}(0)M^{-1}_{lj}/\det(M_{ij})$, $\rho(t) = \rho(0)/\det(M_{ij})$.

В азимутально симметричном случае скорость плазмы пусть имеет только радиальную компоненту, а магнитные силовые линии представляют собой концентрические окружности. Этому соответствуют матрицы w_{ij} и $A_{ij}(0)$, в которых $w_{12} = w_{21} = 0$, $w_{11} = w_{22} = \dot{M}/M$, $A_{11}(0) = A_{22}(0) = 0$, $A_{21}(0) = -A_{12}(0) = a$. Уравнение (2) имеет следствием $\ddot{M} = -a^2/2\pi\rho(0)M$ с начальными условиями: $M(0) = 1$, $\dot{M}(0) = w(0)$.

Сжатие пинча вблизи особенности при $t \to t_0$ описывается зависимостью

$$M(t) \approx \Omega(t_0 - t)\,(-\ln[\Omega(t_0 - t)])^{1/2}, \tag{3}$$

где $\Omega = a/(2\pi\rho(0))^{1/2}$. Расширение Z-пинча на начальной стадии при

$$M(t) \ll \exp(w^2(0)/2\Omega^2) \tag{4}$$

может быть задано функцией

$$M(t) \approx 1 + w(0)\,t - \frac{\Omega^2}{w^2(0)}\,(1 + w(0)\,t)\ln(1 + w(0)\,t). \tag{5}$$

Неравенство (4) может иметь место только при условии $w^2(0)/2\Omega^2 \gg 1$, которое использовано при выводе (5).

Рассмотрим зависимость азимутально несимметричных возмущений от времени. Представим M_{ij} в виде $M_{ij}(t) = M(t)\delta_{ij} + \mu_{ij}$, где матрица μ_{ij} по предположению мала. Для $\mu_{ij}(t)$ из (2) следуют уравнения

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mu}_{11} & \ddot{\mu}_{12} \\ \ddot{\mu}_{21} & \ddot{\mu}_{22} \end{pmatrix} = \frac{\Omega^2}{M^2(t)} \begin{pmatrix} 2\mu_{11} & -\mu_{21} \\ -\mu_{12} & 2\mu_{22} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

в которых $M(t)$ задана формулами (3) или (5). Решение (6) показывает, что на стадии разлета зависимости возмущений μ_{ij} от времени имеет вид

$$\mu_{11}, \mu_{22} \propto t + 2t\,[\Omega/w(0)]^2 \ln t, \quad \mu_{12}, \mu_{21} \propto t - t\,[\Omega/w(0)]^2 \ln t,$$

а на стадии сжатия

$$\mu_{11}, \mu_{22} \propto \exp([-\ln\Omega(t_0 - t)]^{1/2})(t_0 - t)^{1/2}[-\ln\Omega(t_0 - t)]^{1/4},$$

$$\mu_{12}, \mu_{21} \propto \sin([-\ln\Omega(t_0 - t)]^{1/2})(t_0 - t)^{1/2}[-\ln\Omega(t_0 - t)]^{1/4}.$$

Отсюда следует, что азимутальная асимметрия увеличивается как в процессе сжатия, так и расширения пинча. Наиболее быстро растут диагональные элементы матрицы μ_{ij}. Поэтому нелинейную стадию будем описывать автомодельными решениями (1) частного вида, в которых матрица w_{ij} диагональна, а матрица A_{ij} имеет отличные от нуля компоненты $A_{12}(t)$ и $A_{21}(t)$ ($A_{12}(0) = -A_{21}(0) = a$). При этом матрица M_{ij} также диагональна. Уравнения (2) принимают вид:

$$\ddot{M}_{11} = -(\Omega^2/2M_{11})(M_{11}/M_{22} + M_{22}/M_{11}),$$

$$\ddot{M}_{22} = -(\Omega^2/2M_{22})(M_{11}/M_{22} + M_{22}/M_{11}).$$

Эта система имеет интеграл

$$\dot{M}_{11}^2/2 - \dot{M}_{22}^2/2 + (\Omega^2/2)\,(M_{11}/M_{22} - M_{22}/M_{11}) = \mathrm{const}, \tag{7}$$

который подобен интегралу энергии для движения частицы в потенциальном поле. Отличие состоит в том, что "масса" частицы представляет собой диагональную матрицу с компонентами, равными соответственно плюс и минус единице.

Движение частиц с анизотропной массой обсуждается в /4/, а частиц с отрицательной инертной массой в /5/. Используя эти результаты, можно показать, что из (7) для данного вида потенциальной энергии следует вывод о неизбежности возникновения за конечное время квазиодномерной особенности как при сжатии, так и при расширении пинча. В нуль обращается только одна из компонент M_{ij}, например, M_{11}. Вблизи особенности $M_{11}(t) \propto (t_0 - t)^{2/3}$, $w_{11}(t) \propto (t_0 - t)^{-1}$, $\rho(t) \propto (t_0 - t)^{-2/3}$, $A_{12}(t) \propto (t_0 - t)^{-4/3}$, т.е. в бесконечность обращается одна компонента скорости и одна компонента магнитного поля. При этом возникает конфигурация вида, показанного на рис. 1.

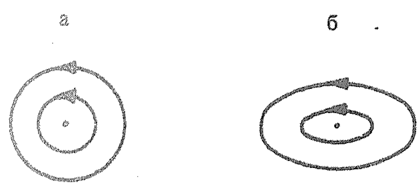

Рис. 1. Эволюция магнитного поля в центральной части Z-пинча при $t = 0$ (а), $t \to t_0$ (б). Вблизи особенности образуется квазиоднородная магнитная конфигурация. Электрический ток параллелен оси z.

Полученные результаты служат примером нелинейной стадии неустойчивости динамического Z-пинча, соответствующей развитию моды с низшей азимутальной асимметрией.

Автор благодарен Н.В. Филиппову, обсуждения с которым физики плазменного фокуса привели к написанию этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф и л и п п о в Н. В. Письма в ЖЭТФ, **31**, 131 (1980).
2. B u l a n o v S. V., O l' s h a n e t s k i j M. A. Phys. Lett., **100A**, 35 (1984).
3. Б у л а н о в С. В., О л ь ш а н е ц к и й М. А. Физика плазмы, **11**, 727 (1985).
4. З а й м а н Дж. Принципы теории твердого тела. М., Мир, 1974.
5. В е б е р Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. М., изд. ин. лит., 1962.

Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 3 ноября 1987 г.