Краткие сообщения по физике № 2-1988 г.

УДК 533.6.011

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОГО ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Е.Г. Гамалий, Р. Драгила*

Найдены аналитические автомодельные решения уравнений релятивистской гидродинамики, описывающие изотермические и адиабатические движения релятивистского идеального газа.

В последние годы в исследованиях взаимодействия лазеров с веществом проявляется интерес к изучению воздействия сверхмощных потоков электромагнитного излучения на различные среды. Энергия осцилляций электрона в сильном поле превышает энергию покоя электрона, если параметр $q\lambda^2$ (q – плотность потока энергии излучения в Вт/см^2, λ – его длина волны в микронах), характеризующий взаимодействие, удовлетворяет условию $q\lambda^2 > \pi m^2 c^5/e^2 \approx 4\cdot 10^{18}$ Вт·мкм^2/см^2. Этот предел достигнут не только в экспериментах с длинноволновым лазером /1/, но и с коротковолновым /2/. При повышении указанного предела движение образовавшейся плазмы является релятивистским. Из групповых свойств релятивистских уравнений гидродинамики очевидно, что они должны иметь автомодельные решения того же типа, что и в нерелятивистском случае. Целью настоящей работы является получение аналитических решений уравнений релятивистской гидродинамики, которые могут послужить гидродинамическим фоном для решения более сложных задач взаимодействия сверхмощных потоков излучения с веществом.

Уравнения релятивистской гидродинамики могут быть записаны в виде /3/:

$$wu^k\,\partial u_i/\partial x^k = -\,\partial P/\partial x^i - u_i u^k\,\partial P/\partial x^k, \qquad \partial(nu_i)/\partial x^i = 0. \tag{1}$$

Здесь u – 4-вектор скорости, P – давление, n – плотность числа частиц в собственной системе отсчета, w – энтальпия единицы объема, $w = e + P$, e – внутренняя энергия единицы объема.

В одномерном случае движения вдоль оси x (1) легко привести к виду ($v \equiv v_x$; $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$):

$$\frac{w}{c^2}\left\{v\gamma\,\frac{\partial(v\gamma)}{\partial x} + \gamma\,\frac{\partial(v\gamma)}{\partial t}\right\} = -\gamma\,\frac{\partial P}{\partial x} - \gamma^2\,\frac{v}{c^2}\,\frac{\partial P}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho\gamma}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v\gamma)}{\partial x} = 0.$$

Будем искать автомодельные решения (2) в безразмерных переменных $u = v/c$; $\xi = x/ct$. Тогда система (2) принимает вид:

$$w\,\frac{u-\xi}{1-u^2}\,\frac{du}{d\xi} = (u\xi - 1)\,\frac{dP}{d\xi},$$

$$\frac{u\xi - 1}{(u-\xi)(1-u^2)}\,\frac{du}{d\xi} = \frac{d\ln\rho}{d\xi}. \tag{3}$$

* Центр лазерной физики Австралийского национального университета, Канберра, Австралия.

Будем использовать релятивистские уравнения состояния идеального газа /4/

$$w = \rho c^2 K_3(mc^2/T)/K_2(mc^2/T); \quad P = nT; \quad \rho = mn. \tag{4}$$

Здесь K_n – функция Бесселя второго рода, используя асимптотику которой можно получить /4/:

$$w = \begin{cases} \rho c^2 \left\{1 + 5T/2mc^2 + (15/8)(T/mc^2)^2 + \dots\right\}; & T \ll mc^2; \\ 4\rho T/m; \quad T \gg mc^2. \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения (3) особенно просто решаются в изотермическом и изэнтропическом случаях.
В изотермическом случае система (3) запишется в виде

$$\frac{u-\xi}{1-u^2}\frac{du}{d\xi} = (u\xi - 1)c_s^2 \frac{d\ln\rho}{d\xi},$$
$$-\frac{(1-u\xi)}{(u-\xi)(1-u^2)}\frac{du}{d\xi} = \frac{d\ln\rho}{d\xi}. \tag{6}$$

Здесь c_s^2 – квадрат релятивистской изотермической безразмерной (в единицах c) скорости звука $c_s^2 = TK_2/mc^2 \cdot K_3$. Подставляя второе уравнение системы (6) в первое и полагая, что $du/d\xi \neq 0$, имеем: $(1 - \xi u)^2 c_s^2 = (u - \xi)^2$, откуда

$$u = (c_s + \xi)/(1 + c_s\xi). \tag{7}$$

Из (7) следует, что $u \to c_s$ при $\xi \to 0$, а фронт волны ($\xi \to 1$) движется со скоростью света ($u \to 1$, т.е. $v \to c$). Дифференцируя (7) и подставляя во второе уравнение системы (6), получим

$$\frac{d\ln\rho}{d\xi} = -\frac{1}{c_s^2}\frac{1}{1-\xi^2}. \tag{8}$$

Решение (8) известно /5/:

$$\rho/\rho_0 = [(1-\xi)/(1+\xi)]^{1/c_s}. \tag{9}$$

Решения (7) и (9) в нерелятивистском пределе ($v \ll c$) переходят в известные выражения: $v = v_s + x/t$; $\rho = \rho_0 \exp(-x/v_s t)$. Здесь $v_s = (T/m)^{1/2}$ – изотермическая скорость звука. Легко видеть, что при $v \ll c$ и $T \ll mc^2$ $cc_s \to v_s^2$, так как $K_3/K_2 \to 1$ /4/.

В изэнтропическом случае, т.е. при выполнении условия

$$dw/\rho = dP/\rho, \tag{10}$$

для релятивистски идеального газа с уравнением состояния (4) в общем случае связь между давлением и плотностью выражается квадратурой, и получить аналитическое решение не удается. Однако в ультрарелятивистской области ($T \gg mc^2$), когда удельная энтальпия выражается второй формулой из (4), из (10) следуют известные выражения для релятивистской адиабаты

$$P \sim \rho^{4/3}; \qquad \rho \sim T^3. \tag{11}$$

Подставляя (5) и (11) в уравнения (3), мы опять придем к уравнениям (6), в которых вместо c_s теперь стоит $c_a = v_a/c = 1/\sqrt{3}$ – безразмерная ультрарелятивистская скорость звука.

Следовательно, для ультрарелятивистского адиабатического разлета решения формально совпадают с (7) и (9):

$$\begin{gathered} u = v/c = (1 + \sqrt{3}\,\xi)/(\sqrt{3} + \xi), \\ \rho/\rho_0 = [(1 - \xi)/(1 + \xi)]^{\sqrt{3}}, \\ T/T_0 = (\rho/\rho_0)^{1/3} = [(1 - \xi)/(1 + \xi)]^{1/\sqrt{3}}. \end{gathered} \tag{12}$$

Так как мы предполагали, что $T \gg mc^2$, решения (12) не верны вблизи границы газ – вакуум, но их можно использовать при очень малых плотностях $\rho/\rho_0 \ll 1$, поскольку $T \sim \rho^{1/3}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Priedhorsky W. et al. Phys. Rev. Lett., 47, 1661 (1981); Forslund D. W., Goldstone P.D. in "Los Alamos science", spring/summer (1985).
2. Burgess M. D. G. et al. Phys. Rev. A, 32, № 5, 2899 (1985).
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М., Наука, 1986, с. 694.
4. DeGroot S. R. et al. Physica, 42, 309 (1969).
5. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.

Поступила в редакцию 5 ноября 1987 г.