Краткие сообщения по физике № 2-1988 г.

УДК 530.145

КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМОСТЬ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ ОДНОМЕРНЫХ СИСТЕМ

А.Г. Ушверидзе

Предложен метод построения одномерных уравнений Шредингера, точно решаемых для конечных участков спектра.

Точно решаемых моделей в квантовой механике немного, так как требование точной решаемости уравнения Шредингера (УШ) для всех состояний является слишком жестким. Это стимулирует поиск моделей, для которых спектральная задача решалась бы точно, но лишь для ограниченных участков спектра. Отдельные примеры таких "квазиточнорешаемых" (КТР) моделей приведены в /1–3/.

В настоящей работе исследовано одномерное УШ

$$[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)]\Psi(x) = E\Psi(x), \quad \Psi(x_\pm) = 0, \quad \int_{x_-}^{x_+} \Psi^2(x)\,dx < \infty \tag{1}$$

и указан метод перечисления всех типов гладких в интервале $[x_-, x_+]$ потенциалов, для которых УШ (1) является КТР уравнением в классе функций вида $\Psi(x) = f(\lambda(x))\,g(x)$, где $\lambda(x)$ – полиномы. Назовем (1) КТР уравнением L-того порядка, если при данном V оно имеет L решений указанного вида.

Рассмотрим спектральное уравнение

$$[-P(\lambda)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} - Q(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda} + \sum_{n=1}^{N} r_n\lambda^n]\,f(\lambda) = \gamma f(\lambda), \qquad \lambda \in [\lambda_-, \lambda_+], \tag{2}$$

в котором $Q(\lambda)$ и $P(\lambda)$ – вещественные полиномы порядков $N+1$ и $\leqslant N+2$. Если $P(\lambda) \propto (\lambda - s_1)^{N_1} \cdot\ldots\cdot (\lambda - s_K)^{N_K}$, то уравнение (2) имеет $K+1$ особых точек в $s_1, \ldots, s_K$ и ∞, кратностей $N_1, \ldots, N_K$ и $N_\infty = N + 3 - \Sigma N_i$. Пусть концы интервала $[\lambda_-, \lambda_+]$ совпадают с вещественными особыми точками уравнения (2), полином $P(\lambda)$ в $[\lambda_-, \lambda_+]$ положителен, а функция $\omega(\lambda) \equiv \int_{\lambda_0}^{\lambda} [Q(\lambda) - \frac{1}{2}P'(\lambda)]P^{-1}(\lambda)d\lambda$, $\lambda_0 \in [\lambda_-, \lambda_+]$ в точках $\lambda_\pm$ обращается в нуль. Пусть при этих условиях и при некотором наборе параметров r_n уравнение (2) имеет собственное значение γ и собственную функцию $f(\lambda)$, регулярную и квадратично интегрируемую с весом $\omega(\lambda)$ на интервале $[\lambda_-, \lambda_+]$. Тогда УШ с потенциалом

$$V(x) = \frac{1}{2}[Q(\lambda) - \frac{P'(\lambda)}{2}]' + \frac{1}{4P(\lambda)}[Q(\lambda) - \frac{P'(\lambda)}{2}][Q(\lambda) - \frac{3P'(\lambda)}{2}] + \sum_{n=1}^{N} r_n\lambda^n, \tag{3}$$

где $\lambda = \lambda(x)$ – функция, определяемая из соотношения

$$x = \int_{\lambda_0}^{\lambda(x)} d\lambda/\sqrt{P(\lambda)}, \tag{4}$$

имеет на интервале $[x_-, x_+] = [x(\lambda_-), x(\lambda_+)]$ решение

$$E = \gamma, \quad \psi(x) = \sqrt{\omega(\lambda(x))}\, f(\lambda(x)). \tag{5}$$

Это утверждение доказывается тривиально, переходом в (2) к новым функциям и независимым переменным по формулам (5) и (4).

Покажем теперь, что при некоторых значениях параметров r_n уравнение (2) может иметь полиномиальные, и следовательно, регулярные собственные функции. Пусть $f(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + \ldots + f_M\lambda^M$ – полином с неизвестными коэффициентами, нормированный условием $f_M = 1$. Чтобы он удовлетворял уравнению (2), параметры $r_N, \ldots, r_1$ должны иметь вид:

$$\begin{aligned} r_N &= M(M-1)p_{N+2} + Mq_{N+1}, \\ r_{N-1} &= M(M-1)p_{N+1} - Mq_N - [2(M-1)p_{N+2} + q_{N+1}]f_{M-1} \end{aligned} \tag{6}$$

и т.д., где p_n и q_n – коэффициенты полиномов $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$. Кроме того, должны выполняться равенства:

$$\sum_{m=0}^{M} [-m(m-1)p_{n+2-m} - mq_{n+1-m} + r_{n-m}]f_m = \gamma f_n \tag{7}$$

при $n = 0, \ldots, M$. Подстановка (6) в (7) превращает (7) в, вообще говоря, нелинейное спектральное уравнение в $M + 1$-мерном пространстве, имеющее $(M + 1)^N$ решений γ, $(f_0, \ldots, f_M)$. Каждому решению с помощью (6) можно сопоставить набор параметров $r_1, \ldots, r_N$. Таким образом, решая систему уравнений (6) и (7), можно найти наборы параметров r_n, для которых уравнение (2) имеет решение γ, $f(\lambda)$, и построить его. Поскольку набор r_n определяет потенциал (3), а решению γ, $f(\lambda)$ соответствует решение E, $\Psi(x)$ (5) УШ с этим потенциалом, то следовательно, найден алгебраический способ построения и одновременного решения КТР моделей.

Для получения КТР модели L-того порядка нужно, чтобы каждому допустимому набору r_n соответствовало L решений уравнения (2). Это заведомо возможно, если параметры задачи подобраны так, что числа r_n, определяемые с помощью (6), не зависят от коэффициентов полинома $f(\lambda)$. В этом случае уравнение (7) становится линейным и при каждом M имеет M + 1 решений. Следовательно, мы приходим к серии КТР моделей порядков $M + 1 = 1, \ldots, \infty$.

Получаемые таким образом КТР модели можно классифицировать по типам соответствующих им потенциалов. Будем относить потенциал V к типу $T_V = s_1^{N_1} \ldots s_k^{N_k}\, \infty^{N_\infty}[\lambda_-, \lambda_+]$; если уравнение (2) имеет $K + 1$ особых точек $s_1, \ldots, s_K$, ∞ кратностей $N_1, \ldots, N_K$, N_∞ и решается в интервале $[\lambda_-, \lambda_+]$. В этом случае потенциал (3) может быть представлен в виде:

$$V(x) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{n=1}^{N_k} \frac{A_{nk}}{(\lambda - s_k)^n} + \sum_{n=1}^{N+N_\infty-1} B_n\lambda^n + C + \sum_{n=1}^{N} r_n\lambda^n, \quad \lambda = \lambda(x), \tag{8}$$

где A_{nk}, B_n и C – величины, являющиеся целыми функциями параметров s_k и q_k. При этом комплексно сопряженным особым точкам s_{k_1} и s_{k_2} соответствуют комплексно сопряженные величины A_{nk_1} и A_{nk_2} (следствие вещественности уравнений (1) и (2)). Умножение уравнения (2) на число и линейная замена переменной λ не меняет типа потенциала (8). Это позволяет произвольно зафиксировать старший коэффициент полинома $P(\lambda)$ и положение двух любых его корней s_1 и s_2. С учетом наличия произвольного параметра λ_0, возникающего при переходе (4) от переменной λ к переменной x, это означает, что множество потенциалов каждого типа будет $N_V = N + 3 + \max[0, K - 2]$ -параметрическим. Из N_V параметров три соответствуют тривиальным преобразованиям $V(x) \to a^2V(ax + b) + c$.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров. Классифицируя получающиеся потенциалы, наряду с их типом T_V укажем вид функции $\lambda(x)$ и интервал $[x_-, x_+]$, на котором формулируется краевая задача для УШ. Явный вид потенциалов не приводим из-за недостатка места. Он может быть восстановлен по формулам (3) или (8).

А) $N = 0$. Уравнение (7) линейно и при любом заданном M имеет единственное собственное значение $\gamma = -M(M-1)p_2 - Mq_1$. Поскольку для всех решений с разными M потенциал V один и тот же, то приходим к точно решаемым задачам. Согласно нашей классификации их имеется всего шесть типов. Все они описаны в литературе /4/.

Б) $N = 1$. Уравнение (7) линейно и при любом заданном M и $r_1 = M(M-1)p_3 + Mq_2$ имеет $M+1$ решений с разными γ. Поскольку при фиксированном M потенциал V для всех решений один и тот же, то для каждого M имеем КТР модель $M+1$-го порядка. Таких моделей имеется всего одиннадцать типов:

1) $T_V = (-a)^1(-1)^1 0^1 \infty^1 [0, \infty]$, $a > 1$, $\lambda(x) = a\,\mathrm{cs}^2[x, m]$, $x \in [0, K(m)]$, $m = 1 - a^{-1}$.

2) $T_V = 0^1 1^1 a^1 \infty^1 [0, 1]$, $a > 1$, $\lambda(x) = \mathrm{sn}^2[x, m]$, $x \in [0, K(m)]$, $m = a^{-1}$.

3) $T_V = (a)^1 (a^*)^1 0^1 \infty^1 [0, \infty]$, $\lambda(x) = \mathrm{cs}^2[x, m]\,\mathrm{nd}^2[x, m]$, $x \in [0, K(m)]$, $m = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}|a^{-1}|\mathrm{Re}\,a$.

4) $T_V = (-1)^1 0^2 \infty^1 [0, \infty]$, $\lambda(x) = c\ \mathrm{sech}^2 x$, $x \in [0, \infty]$.

5) $T_V = 0^1 1^2 \infty^1 [0, 1]$, $\lambda(x)\ \mathrm{th}^2 x$, $x \in [0, \infty]$.

6) $T_V = (-1)^2 0^1 \infty^1 [0, \infty]$, $\lambda(x) = \mathrm{ctg}^2 x$, $x \in [0, \pi/2]$.

7) $T_V = 0^3 \infty^1 [0, \infty]$, $\lambda(x) = x^{-2}$, $x \in [0, \infty]$.

8) $T_V = (-1)^1 0^1 \infty^2 [0, \infty]$, $\lambda(x) = \mathrm{sh}^2 x$, $x \in [0, \infty]$.

9) $T_V = 0^1 1^1 \infty^2 [0, 1]$, $\lambda(x) = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$.

10) $T_V = 0^2 \infty^2 [0, \infty]$, $\lambda(x) = e^x$, $x \in [-\infty, \infty]$.

11) $T_V = 0^1 \infty^3 [0, \infty]$, $\lambda(x) = x^2$, $x \in [0, \infty]$.

В) $N = 2$. Уравнение (7) линейно, если $2(M-1)p_4 + Mq_3 = 0$. Если при этом $r_1 = M(M-1)p_3 + Mq_2$ и $r_2 = M(M-1)p_4 + Mq_3$, то снова получим бесконечные серии КТР моделей произвольного порядка, которых в этом случае будет уже 20 типов. Однако 18 из них сводятся к предыдущим 11 типам. Это является следствием того, что при наличии хотя бы одной конечной вещественной особой точки у уравнения (2), оно в результате дробно-линейной замены переменной может быть сведено к аналогичному уравнению с N на единицу меньшим. Чтобы такая редукция была невозможной, все конечные особые точки должны быть комплексными. При $N = 2$ это возможно в двух случаях: $T_V = (i)^2(-i)^2[-\infty, \infty]$ и $T_V = (i)^1(-i)^1(a)^1(a^*)^1[-\infty, \infty]$, что дает две новые бесконечные серии КТР моделей. Если не налагать никаких условий на параметры p_4 и q_3, то уравнение (7) становится нелинейным. Можно показать, что в этом случае его решениям соответствуют КТР модели не более чем седьмого порядка. В случае $N \geqslant 3$ уравнение (7) линейно только при $M = 1$. В остальных случаях оно допускает только конечные серии КТР моделей.

Отметим, что описанный подход применим и для исследования УШ с весовой функцией, так как заменой функции и независимой переменной его всегда можно свести к виду (1).

Автор благодарен М.А. Соловьеву, А.В. Турбинеру, В.Я. Файнбергу и Е.С. Фрадкину за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Leach P. G. L. J. Math. Phys. 25, 974 (1984).
2. Turbiner A. V., Ushveridze A. G. Preprint ITEP № 55, M., 1987.
3. Турбинер А. В. Препринт ИТЭФ № 67, М., 1987.
4. Генденштейн Л. Е. Письма в ЖЭТФ, 38, 299 (1983).

Поступила в редакцию 13 ноября 1987 г.