Краткие сообщения по физике № 2-1988 г.

УДК 530.145

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ И МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ШРЕДИНГЕРА

А.Г. Ушверидзе

Исследована природа квазиточнорешаемости в квантовой механике.

Предлагается метод построения точно решаемых (ТР) и квазиточнорешаемых (КТР) одномерных и многомерных уравнений Шредингера (УШ). Показано, что точная и квазиточная решаемость квантовомеханических моделей /1, 2/ связана с разрешимостью специальных функциональных уравнений — аналогов уравнений Янга — Бакстера:

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta(\lambda_i - \lambda_{i+1})\Delta(\lambda_i - \lambda_{i+2}) + \sum_{i=1}^{3} \Omega(\lambda_i - \lambda_{i+1}) = 0 \tag{1}$$

для любых λ_i, $\lambda_{i+3} \equiv \lambda_i$. Нечетные решения (1) с полюсом в нуле удовлетворяют уравнению

$$\Delta'(\lambda) + \Delta^2(\lambda) = 2\Omega(\lambda) + \Omega(0). \tag{2}$$

С другой стороны, каждое УШ приводится к уравнению /3/:

$$y'(\lambda) + y^2(\lambda) + 2B(\lambda)y(\lambda) + C(\lambda) = 0. \tag{3}$$

Если искать решения (3) в виде $y(\lambda) = \sum_{i=1}^{M} \Delta(\lambda - \lambda_i)$ при $B(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N} b_\alpha \Delta(\lambda - a_\lambda)$, $C(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^{N} c_\alpha \Delta(\lambda - a_\alpha) + c_0(\lambda)$, то в силу (1) и (2) возникает система:

$$\sum_k{}' \Delta(\lambda_i - \lambda_k) + \sum_\alpha b_\alpha \Delta(\lambda_i - a_\alpha) = 0, \quad i = 1, \ldots, M, \tag{4}$$

решая которую относительно λ_i, можно найти c_α и $c_0(\lambda)$.

Уравнения (4) интерпретируются как условия равновесия системы M подвижных частиц с координатами λ_i и зарядами $q_i = 1$, взаимодействующих друг с другом и с N неподвижными частицами с координатами a_α и зарядами $Q_\alpha = b_\alpha$. Потенциал взаимодействия — парный: $U(\lambda) = \sum_{i<k} q_i q_k v(\lambda_i - \lambda_k) + \sum_{i,\alpha} q_i Q_\alpha v(\lambda_i - a_\alpha)$, $v(\lambda) = -\int \Delta(\lambda)d\lambda$, и на малых расстояниях — кулоновский $v(\lambda) \to \ln|\lambda|$, $\lambda \to 0$. Равновесие достигается при невозможности слипания частиц λ_i с частицами a_α ($b_\alpha > 0$) и невозможности ухода частиц λ_i на бесконечность ($\Sigma b_\alpha < 1 - M$). Пусть вначале $-\infty \equiv a_0 < a_1 < \ldots < a_N < a_{N+1} \equiv \infty$. Если система определена на R^1 (S^1), то число устойчивых интервалов $[a_\alpha, a_{\alpha+1}]$ не превышает $N - 1$ (N). Для каждого распределения частиц λ_i по устойчивым интервалам существует положение устойчивого равновесия, отвечающее некоторому решению (4). Число таких решений равно C_{N-1}^{N+M-1} для R^1 и C_N^{N+M} для S^1. Если интервал $[a_\alpha, a_{\alpha+1}]$ устойчив, то полагая

$$\psi(x(\lambda)) = \exp\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda} B(\lambda')A^{-1}(\lambda')d\lambda' \int_{\lambda_0}^{\lambda} y(\lambda')d\lambda'\right]; \quad x(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} A^{-1/2}(\lambda')d\lambda'; \quad \lambda, \lambda_0 \in [a_\alpha, a_{\alpha+1}], \tag{5}$$

где $A(\lambda)$ — положительная в $[a_\alpha, a_{\alpha+1}]$, и обращающаяся в нуль в a_α и $a_{\alpha+1}$ функция, приходим к УШ $[-\partial^2/\partial x^2 + V(x)]\psi(x) = 0$, в котором

$$\tilde{V}(x) = [A(\lambda)B(\lambda) - A'(\lambda)]' + [A(\lambda)B(\lambda) - A'(\lambda)][A(\lambda)B(\lambda) - 3A'(\lambda)]A^{-1}(\lambda) - A(\lambda)C(\lambda) \qquad (6)$$

определенный с точностью до аддитивной константы потенциал устойчивой квантовой системы. (Волновая функция, нормируемая в $[x(a_\alpha), x(a_{\alpha+1})]$, обращается в нуль в точках $x(a_\alpha)$ и $x(a_{\alpha+1})$). Согласно вышеизложенному, построение решений этого УШ сводится к решению системы числовых уравнений (4). Величины λ_i — узлы волновой функции. В общем случае вид потенциала зависит от λ_i (через член $A(\lambda)C(\lambda)$), однако, если $A(\lambda) = A_0 \exp \sum\limits_\alpha v(\lambda - a_\alpha)$, то $\tilde{V}(x)$ для всех, или некоторых решений отличается только на константу: $\tilde{V}(x) = V(x) - E^{(n)}$ ($V(x)$ — истинный потенциал, n — номер решения), что приводит нас к ТР или КТР моделям. Для явного построения этих моделей необходимо решить уравнение (1). Нам удалось найти следующие решения: а) рациональные $\Delta(\lambda) = \lambda^{-1}$, $\Omega(\lambda) = 0$, б) тригонометрические $\Delta(\lambda) = \omega\,\mathrm{ctg}(\omega\lambda)$, $\Omega(\lambda) = \omega^2$ и в) эллиптические $\Delta(\lambda) = \ln'_\lambda \theta_1(\omega\lambda, \tau)$, $\Omega(\lambda) = \ln'_\tau[\theta_1(\omega\lambda,\tau)/\sqrt[3]{\theta'_1(0,\tau)}]$ (ω и τ — вещественные или мнимые).

В рациональном случае $c_0(\lambda) \equiv 0$ и вся зависимость $\tilde{V}$ от λ_i содержится в c_α. При этом $A(\lambda)C(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} r_n\lambda^n$, где $r_{N-1} = \Sigma c_\alpha$, $r_{N-2} = \Sigma a_\alpha c_\alpha$, $r_{N-3} = \Sigma a_\alpha^2 c_\alpha - (\Sigma a_\alpha)\Sigma a_\alpha c_\alpha$, и т.д. Из (4) находим: $\Sigma c_\alpha = 0$, $\Sigma a_\alpha c_\alpha = M(M-1) + M\Sigma b_\alpha$, $\Sigma a_\alpha^2 c_\alpha = M\Sigma b_\alpha a_\alpha + (\Sigma b_\alpha + M - 1)\sigma_1(\lambda)$ и т.д. Энергию определяет r_0, поэтому при $N = 2$ существует 5-параметрическое семейство бесконечных ТР моделей (потенциал V от M не зависит; так как все частицы должны находиться в единственном устойчивом интервале, то каждому M соответствует единственное M-узловое решение). При $N = 3$ имеется 7-параметрическое семейство бесконечных серий КТР моделей произвольного порядка (потенциал V от M зависит; для любого M частицы распределяются $M + 1$ способами между двумя устойчивыми интервалами, один из которых — физический, поэтому имеется $M + 1$ решений с 0, ..., M узлами). При $N = 4$ V зависит от λ_i через $\sigma_1(\lambda)$, поэтому бесконечные серии КТР моделей возможны только при $\Sigma b_\alpha = 1 - M$. Если $\Sigma b_\alpha \neq 1 - M$, то КТР модель L-того порядка возникает при наложении $L - 1$ условий $\sigma_1(\lambda^1) = \ldots = \sigma_1(\lambda^L)$ на $2N - 2$ нетривиальных параметров системы /2/ (λ^i — различные, зависящие от параметров системы решения). Это приводит к конечным сериям КТР моделей вплоть до седьмого порядка. В общем случае ($N \geqslant 4$) максимальный порядок КТР модели равен $L_{max} = 3 + 4/(N-3)$, если $\Sigma b_\alpha \neq 1 - M$ и $L_{max} = 3 + 5/(N-4)$, если $\Sigma b_\alpha = 1 - M$. Число свободных параметров модели равно $2N + 1 - (L-1)(N-3)$ в первом и $2N - (L-1)(N-4)$ во втором случаях. Решения выражаются через полиномы степеней $K \geqslant K_{min} = L + N - 4$ в первом и $K \geqslant K_{min} = L + N - 5$ во втором случаях.

Для тригонометрических решений (1) $c_0(\lambda)$ — константа, зависящая только от M. Член $A(\lambda)c(\lambda)$ — тригонометрический полином. Если $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ (система на S^1), то при $N = 0$ имеются ТР, а при $N = 2$ — КТР модели произвольного порядка. Если $\mathrm{Re}\,\omega = 0$ (система на R^1), то из-за неустойчивости при $N = 0$ ТР моделей нет, а при $N = 2$ имеются КТР модели произвольного порядка. В остальных случаях возможны только конечные серии КТР моделей. Последнее относится также к эллиптическому случаю, ввиду зависимости $c_0(\lambda)$ от λ.

Уравнения (4) по форме совпадают с уравнениями Бете для вполне интегрируемых систем в квазиклассическом пределе. Тип системы определяется заданием $\Delta(\lambda)$ — аналогом квазиклассической Т-матрицы и числами a_α и b_α. Величины λ_i выступают в качестве быстрот. В самом общем (эллиптическом) случае — это неоднородная восьмивершинная модель или система N спинов на неоднородной одномерной решетке с анизотропным взаимодействием. Роль спиновых операторов играют элементы бесконечномерных неприводимых представлений алгебры $su(2) \propto sl(2) \propto 0(3)$, характеризуемые числами b_α: $\sigma_\alpha^+ = t_\alpha$, $\sigma_\alpha^0 = t_\alpha\partial/\partial t_\alpha + b_\alpha$, $\sigma_\alpha^- = t_\alpha\partial^2/\partial t_\alpha^2 + 2b_\alpha\partial/\partial t_\alpha$ (α — номер узла). Числа a_α характеризуют неоднородность, а ω и τ — параметры анизотропии. Тригонометрические и рациональные ТР и КТР модели связаны с предельными случаями $\tau \to \infty$ и $\omega \to 0$ указанной спиновой системы. Налицо — групповое происхождение точной и квазиточной решаемости.

Все многообразие ТР и КТР моделей каждого типа (рациональных, тригонометрических, эллиптических) возникает при вырождении уравнения (3), т.е. при слиянии координат a_α или уводе их на бесконечность, а также при переводе их в комплексную область. Это позволяет расклассифицировать возникающие потенциалы УШ подобно тому, как это было сделано в /2/ для случая рациональных ТР и КТР моделей. Каждому вырожденному случаю соответствует некоторая вполне интегрируемая система. Например, гармоническому осциллятору соответствует модель бозе-газа с δ-образным взаимодействием в квазиклассическом пределе.

Указанная аналогия позволяет строить многомерные ТР и КТР уравнения Шредингера. Первый способ основан на использовании явного вида коммутирующих интегралов движения в квазиклассике $H_i = \Sigma(\omega^a_{\alpha\beta})_i\sigma^a_\alpha\sigma^a_\beta + \Sigma(\omega^a_\alpha)_i\sigma^a_\alpha$ /4/. Числа $\omega^a_{\alpha\beta}$ и ω^a_α могут быть найдены из классических уравнений треугольников /5/. Заменяя σ^a_α на приведенное выше (или любое другое) дифференциальное представление, получим H_i в виде взаимно коммутирующих N-мерных дифференциальных операторов второго порядка. Тогда модели с гамильтонианами $H = H_i$ будут многомерными ТР моделями, а модели с гамильтонианами $H = H_i + \sum_k{}' U_k(t)\,(H_k - E_k)$, где $U_k(t)$ — некоторые функции, будут КТР моделями. Бесконечные серии КТР моделей возникают, если в системе есть симметрия, приводящая к вырождению, т.е. если одним и тем же собственным значениям H_k соответствуют несколько собственных значений H_i. При таком подходе видно, что наличие бесконечных КТР-серий в рациональном и тригонометрическом случаях связано с $U(1)$ симметрией, т.е. с сохранением z-проекции полного спина. В восьмивершинной модели этой симметрии нет, поэтому нет и бесконечных КТР-серий. Другой, менее общий способ заключается в непосредственной интерпретации чисел c_α как собственных значений коммутирующих интегралов движения $\mathbb{C}_\alpha$. Явный вид этих операторов можно получить, линеаризовав $(y = f'/f)$ уравнение (3) и размножив его N раз:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda_i^2} + \sum_\alpha b_\alpha\Delta(\lambda_i - a_\alpha)\frac{\partial}{\partial\lambda_i} + c_0(\lambda_i) + \sum_\alpha c_\alpha\Delta(\lambda_i - a_\alpha)\right]f(\lambda_i) = 0, \tag{7}$$

рассматривая λ_i как независимые переменные. После этого, разрешая систему относительно c_α, можно получить $\mathbb{C}_\alpha$ в виде N-мерных дифференциальных операторов второго порядка. Это приводит к ТР моделям с гамильтонианами $\mathbb{C}_\alpha$. Если же размножить линеаризованное уравнение (3) $N - K$ раз и разрешить систему относительно $N - K$ величин c_α или любых их линейных комбинаций, то получим $(N - K)$-мерные КТР модели, так как дифференциальный оператор будет содержать параметры c_α. Надлежащей заменой переменных полученное многомерное уравнение можно привести к шредингеровскому виду. В этом случае числа c_α можно трактовать, как константы разделения. В рациональном случае (7) являются уравнениями типа Ламэ, поэтому приведение к шредингеровскому виду можно совершить, отождествляя λ_i с многомерными эллипсоидальными координатами.

Простейшим примером получаемых таким образом многомерных КТР задач является УШ с потенциалом

$$V(x) = r^6 + 2r^2\sum_{i=1}^N g_i x_i^2 + \sum_{i=1}^N g_i^2 x_i^2 - (N + 2K)\sum_{i=1}^N x_i^2. \tag{8}$$

Здесь g_i — константы связи, К произвольное натуральное число. При $K = 1$ имеется одно решение, соответствующее основному состоянию. При $K = 2$ имеется $N + 1$ решений с энергиями $E = -2\lambda + \sum_i g_i$, где λ — корни уравнения $\lambda = \sum_i (\lambda + g_i)^{-1}$. Переход в (8) к пределу $N \to \infty$ превращает модель в КТР нелокальную "теорию поля" с возбуждениями бесщелевого типа.

Приведем также пример многомерной КТР модели бесконечного порядка $V(x) = r^6 + 2r^4 g + (g^2 + N - 6)\,r^2$, которая для каждого состояния с моментом $L = 2K$ имеет К решений.

Предлагаемый подход может быть обобщен на случай произвольных групп Ли. Уравнение Риккати (3) в этом случае заменяется на уравнение

$$\sum_{i=1}^{R} (\vec{\omega}_i\vec{\omega}_i) y_i'(\lambda) + \sum_{i\neq k}^{R} (\vec{\omega}_i\vec{\omega}_k) y_i(\lambda) y_k(\lambda) + 2\sum_{i=1}^{R} B_i(\lambda) y_i(\lambda) + C(\lambda) = 0, \qquad (9)$$

в котором ω_i, $i = 1, \ldots, R$ – система простых корней алгебры Ли ранга R. Функции $B_i(\lambda)$ и $C(\lambda)$ имеют тот же вид, что и в (3) при замене α на (α, i). Линеаризация (9) приводит к R-мерному уравнению

$$\left[\sum_{i,k}^{R} (\vec{\omega}_i\vec{\omega}_k) \frac{\partial^2}{\partial\lambda_i\partial\lambda_k} + 2\sum_{i=1}^{R} B_i(\lambda) \frac{\partial}{\partial\lambda_i} + C(\lambda)\right] f(\lambda_1 \ldots \lambda_R) = 0$$

со связями $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_R$. Возникающие для (9) уравнения Бете описывают квазиклассическую вполне интегрируемую систему с гамильтонианом вида $H = \Sigma\omega^a_{\alpha\beta} I^a_\alpha I^a_\beta + \Sigma\omega^a_\alpha I^a_\alpha$, где I^a_α – образующие алгебры Ли в α-том узле.

Автор благодарен П.Б. Вигману за обсуждение результатов работы и ценные замечания, а также В.Я. Файнбергу за интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Turbiner A. V., Ushveridze A. G. Preprint ITEP N 55, M., 1987.
2. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 37 (1988).
3. Турбинер А. В. УФН, 144, 35 (1984).
4. Годен М. Волновая функция Бете. М., Мир, 1987, с. 293.
5. Белавин А. А., Дринфельд В. Г. Препринт ИТФ № 18, М., 1982.

Поступила в редакцию 27 ноября 1987 г.
После переработки 30 декабря 1987 г.