Краткие сообщения по физике № 3-1988 г.

УДК 539.17.01

ФУНКЦИЯ ГРИНА В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ЭЙКОНАЛЬНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ УОЛЛЕСА

В.П. Заварзина, А.В. Степанов

В первом приближении эйконального разложения Уоллеса получено выражение для функции Грина волнового уравнения с оптическим потенциалом.

При решении задач о распространении волн различной природы в неоднородных средах от источников, локализованных в ограниченной области пространства, и в задачах квантовой теории поля широко применяется аппарат функций Грина. Для таких задач используются эйкональные аппроксимации и уточняющие их приближенные выражения метода плавных возмущений (МПВ) /1, 2/ и приближения прямолинейных путей (ППП) /3 – 5/. В то же время, при описании рассеяния адронов промежуточных энергий ядрами оказалось эффективным и другое уточнение эйконального приближения /6 – 8/ – эйкональное разложение Уоллеса /9 – 12/, представляющее собой теорию возмущений по отклонению волновой функции налетающей частицы от ее эйкональной аппроксимации. В настоящей работе приведены результаты расчета в первом приближении этого метода функции Грина $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ для движения частицы в оптическом потенциале $V(\mathbf{r})$.

Функция $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\left\{\nabla^2 + s_0^2[1 - U(\mathbf{r})]\right\} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0).$$

Здесь $U(\mathbf{r}) = 2EV(\mathbf{r})/(\hbar c)^2 s_0^2$; $s_0^2 = (E^2 - M^2c^4)/(\hbar c)^2$; E – полная энергия падающей частицы, M – ее масса.

Если в разложении $\widetilde{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r})$ – фурье-образа функции $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$ относительно координаты $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$

$$\widetilde{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \int d(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)} G(\mathbf{r}|\mathbf{r}_0)$$

в ряд теории возмущений по степеням потенциала

$$\widetilde{G}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-is_0^2)^n}{p^2 - s_0^2 - i\epsilon} \frac{1}{(2\pi)^{3n}} \int d\mathbf{k}_1 \ldots \int d\mathbf{k}_n \exp(-i\mathbf{r}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{k}_i) \times$$
$$\times \frac{\widetilde{U}(\mathbf{k}_1)\ldots\widetilde{U}(\mathbf{k}_n)}{[(\mathbf{p} + \mathbf{k}_1)^2 - s_0^2 - i\epsilon]\ldots[(\mathbf{p} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{k}_i)^2 - s_0^2 - i\epsilon]}, \qquad (1)$$

где $\widetilde{U}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} U(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$, воспользоваться приближением $(\mathbf{p} + \sum_{i=1}^{n}\mathbf{k}_i)^2 \approx p^2 + 2\mathbf{p}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{k}_i$ в каждом факторе в (1), то этот ряд удается просуммировать с результатом

$$\widetilde{G}^{\text{эп}}(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = i\int_0^{\infty} dt \exp[-it(p^2 - s_0^2 - i\epsilon)] \exp[-is_0^2 \int_0^t d\tau U(\mathbf{r} + 2\mathbf{p}\tau)]. \qquad (2)$$

Полагая $p^2 - s_0^2 = (s_0 + q)^2 - s_0^2 \approx 2s_0 q = 2s_0 q_{||}$ и $U(r + 2p\tau) \approx U(r + 2s_0\tau)$, выполним обратное преобразование Фурье от (2). В результате получим известное выражение для функции Грина в эйкональном приближении

$$G^{\text{эп}}(r|r_0) = i\,\delta^{(2)}(r_\perp - r_{\perp 0})\,\Theta(z_0 - z)\,(2s_0)^{-1} \exp[-is_0(z - z_0)]\exp\left[(-is_0/2)\int_0^{z_0 - z} d\zeta U(r + n\zeta)\right],$$

$$n = s_0/s_0, \quad nr = r_{||} = z.$$

Ряд (1) удается просуммировать и в предположении $(p + \sum_{i=1}^{n} k_i)^2 \approx p^2 + 2p\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} k_i^2$. В результате приходим к выражению для функции Грина в первом приближении МПВ или ППП /3–5, 13/:

$$\widetilde{G}^{\text{ППП}}(p, r) = i\int_0^\infty dt\, e^{-it(p^2 - s_0^2 - i\epsilon)} \exp\left\{-is_0^2\int_0^t d\tau \int dk\widetilde{U}(k)\,(2\pi)^{-3} e^{-ik(r + 2p\tau) - i\tau k^2}\right\}. \qquad (3)$$

Дополним (3) поправочными членами при разложении знаменателей в (1) по степеням $k_i k_j$ $(i \neq j)$ с точностью до членов первого порядка и в интегралах вида $\int dk(2\pi)^{-3}\widetilde{U}(k)\,e^{-ik(r+2p\tau) - i\tau k^2} \approx U(r + 2p\tau) + i\tau\nabla_R^2 U(R)|_{R = r + 2p\tau}$ оставим только члены не выше q^2 $(q = p - s_0)$. Удерживая в показателях экспонент только главные члены, соответствующие эйкональному приближению, получаем

$$\widetilde{G}^{W}(p, r) = i\int_0^\infty dt\, e^{-it(2s_0 q_{||} - i\epsilon)}[1 - itq^2]\exp\left[-is_0^2\int_0^t d\tau U(r + 2s_0\tau)\right] \times$$

$$\times\left\{1 - is_0^2\int_0^t d\tau[2\tau q\nabla_r U(r + 2s_0\tau) + 2\tau^2 q^2\nabla_r^2 U(r + 2s_0\tau) + i\tau\nabla_r^2 U(r + 2s_0\tau)] - \right. \qquad (4)$$

$$\left. - i2s_0^4\int_0^t d\tau_1 \nabla_r U(r + 2s_0\tau_1)\int_0^{\tau_1} d\tau_2\tau_2\nabla_r U(r + 2s_0\tau_2)\right\}.$$

Двойной интеграл в фигурных скобках появляется от второго приближения МПВ, тогда как однократный интеграл – результат преобразования выражения ППП. Полагая в (4) $t \to \infty$; $\epsilon, q \to 0$, в соответствии с соотношением $\Psi^{(+)}(r, k) = -\lim_{\epsilon \to 0} i\epsilon\widetilde{G}(-k, r;\ s_0^2 + i\epsilon)e^{ikr}$ получаем выражение для волновой функции первого приближения эйконального разложения Уоллеса

$$\Psi_W^{(+)}(r, s_0) = \Psi_{\text{эп}}^{(+)}(r, s_0)\left[1 + s_0^2\nabla_r^2\int_0^\infty \tau d\tau U(r + 2s_0\tau) - \right.$$

$$\left. - 2is_0^4\nabla_{r_1}\nabla_{r_2}\int_0^\infty d\tau_1 U(r + 2s_0\tau_1)\int_0^{\tau_1} d\tau_2\tau_2 U(r_2 + 2s_0\tau_2)\right|_{r_1 = r_2 = r}.$$

Выполняя обратное преобразование Фурье формулы (4), получаем окончательное выражение для функции Грина $G(r|r_0)$ в этом приближении:

$$G^W(r|r_0) = \frac{i}{2s_0}\,\Theta(z_0 - z)\,\delta^{(2)}(r_\perp - r_{\perp 0})\,e^{-is_0(r - r_0)}\exp\left[-i\frac{s_0}{2}\int_z^{z_0} dz' U(r_\perp, z')\right] \times$$

$$\times\left\{1+(1/4)\int_z^{z_0} dz'(z'-z)\nabla^2_{r'}U(r_\perp,z')-i(s_0/4)\int_z^{z_0} dz'\nabla_{r'}U(r_\perp,z')\int_z^{z'} dz''(z''-z)\nabla_{r''}U(r_\perp,z'')\right\}+$$

$$+\ ie^{-is_0(r-r_0)}\int_0^\infty dt\,[it\nabla^2_r\tilde{\delta}(r-r_0+2s_0t)+s_0^2\int_0^t d\tau 2\tau\nabla_r U(r+2s_0\tau)\nabla_r\tilde{\delta}(r-r_0+2s_0t)+ \qquad (5)$$

$$+\,is_0^2\int_0^t d\tau 2\tau^2\nabla^2_r U(r+2s_0\tau)\nabla^2_r\tilde{\delta}(r-r_0+2s_0t)]\exp[-is_0^2\int_0^t d\tau U(r+2s_0\tau), \quad r=(r_\perp,z).$$

Здесь $\tilde{\delta}(r-r'+2s_0\tau)=\lim_{\epsilon\to 0}\sqrt{\pi/\epsilon}\exp[-(z-z'+2s_0\tau)^2/\epsilon]\delta^{(2)}(r_\perp-r'_\perp)$. При $U\to 0$ функция Грина (5) совпадает с выражением, полученным для свободной функции Грина в работе /14/.

Полученное выражение (5) позволяет уточнить, в частности, результаты эйконального приближения для сечений инклюзивных реакций с помощью обобщенной оптической теоремы /15/.

Авторы благодарны В.А. Сергееву за дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. Введение в статистическую радиофизику, ч. 2. Случайные поля. М., Наука, Физматгиз, 1978.
2. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М., Наука, Физматгиз, 1967.
3. Фрадкин Е.С. Труды ФИАН, 29, 7 (1965); Андреев И.В. ЖЭТФ, 48, 1437 (1965).
4. Кулешов С.Н. и др. ЭЧАЯ, 5, 1 (1974).
5. Барбашов Б.М. и др. ЭЧАЯ, 4, 623 (1973).
6. Заварзина В.П., Сергеев В.А., Степанов А.В. Изв. АН Каз. ССР, сер. физ.-мат., № 4, 1 (1981).
7. Заварзина В.П., Степанов А.В. ЯФ, 43, 854 (1986); Краткие сообщения по физике ФИАН, № 7, 40, 44 (1985).
8. Заварзина В.П., Сергеев В.А. ЯФ, 46, 486 (1987); Sergeev V.A., Zavarzina V.P. Czech. J. Phys., B36, 347 (1986).
9. Wallace S.J. Phys. Rev. Lett., 27, 622 (1971); Phys. Rev., D8, 1846, 1934 (1973); Ann. of Phys., 78, 190 (1973).
10. Baker A. Phys. Rev., D6, 3442 (1972).
11. Sugar R.L., Blankenbecler R. Phys. Rev., 183, 1387 (1969).
12. Swift A.R. Phys. Rev., D7, 1740 (1974).
13. Заварзина В.П., Сергеев В.А., Степанов А.В. Изв. АН СССР, сер. физ., 43, 2441 (1979).
14. Frahn W.E., Schürmann B. Ann. of Phys., 84, 147 (1974); Schürmann B., Frahn W.E. Nucl. Phys., B62, 365 (1973).
15. Заварзина В.П., Сергеев В.А., Степанов А.В. Изв. АН СССР, сер. физ., 48, 172 (1984).

Институт ядерных исследований АН СССР

Поступила в редакцию 27 ноября 1987 г.