Краткие сообщения по физике № 3-1988 г.

УДК 530.145

СПЕКТРАЛЬНЫЕ РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ В КВАЗИТОЧНОРЕШАЕМЫХ МОДЕЛЯХ

А.Г. Ушверидзе

Исследована структура спектральных римановых многообразий в моделях, точно решаемых для ограниченных участков спектра.

В основе предложенного в /1/ метода построения квазиточнорешаемых (КТР) моделей лежит наблюдение, что уравнение

$$(P(\lambda)\partial^2/\partial\lambda^2 + Q(\lambda)\partial/\partial\lambda + \sum_{n=0}^{N} r_n\lambda^n) f(\lambda) = 0, \qquad (1)$$

в котором

$$P(\lambda) = \prod_{\alpha=1}^{N+2} (\lambda - a_\alpha), \quad Q(\lambda) = P(\lambda) \sum_{\alpha=1}^{N+2} \frac{b_\alpha}{\lambda - a_\alpha}, \quad \sum_\alpha a_\alpha = \mathrm{const}, \quad \sum_{\alpha<\beta} a_\alpha a_\beta = \mathrm{const}, \qquad (2)$$

и которое заменой функций и независимой переменной может быть приведено к шредингеровскому виду, при некоторых значениях спектральных параметров r_n допускает полиномиальные решения. Любой из параметров r_n может быть отождествлен с энергией, а остальные включены в потенциал. Поэтому КТР модели L-того порядка возникают, если L решений (1) отличаются лишь значениями "энергетического" спектрального параметра r_n. Все случаи, когда это возможно, перечислены в /2/.

В настоящей работе исследованы аналитические свойства узлов волновых функций и спектральных параметров r_n в зависимости от констант связи a_α и b_β. Применительно к энергетическим уровням некоторых КТР моделей этот вопрос впервые рассматривался в /3, 4/.

Приведем (1) к алгебраическому виду. Пусть C_α – числа, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{n=0}^{N} r_n\lambda^n/P(\lambda) = -\sum_{\alpha=1}^{N+2} C_\alpha/(\lambda - a_\alpha). \qquad (3)$$

Подставляя (3) и (2) в (1) и ища решение (1) в виде полинома $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda - \lambda_M)$, получим:

$$\sum_k{}' 2/(\lambda_i - \lambda_k) = \sum_\alpha b_\alpha/(\lambda_i - a_\alpha), \qquad (4)$$

$$C_\alpha = \sum_i b_\alpha/(\lambda - a_\alpha). \qquad (5)$$

Видно, что (1) распалось на две системы (4) и (5). Решая (5), находим величины λ_i. Подставляя их в (4), получаем числа C_α, по которым с помощью (3) восстанавливаем значения спектральных параметров r_n. Можно показать, что

$$r_N = M(M-1) + M\sum_\alpha b_\alpha, \qquad (6а)$$

$$r_{N-1} = -\sigma_1(a) r_N + M\sum_\alpha b_\alpha a_\alpha + (\sum_\alpha b_\alpha + M - 1)\sigma_1(\lambda), \qquad (6б)$$

$$r_{N-2} = -\ [\sigma_1^2(a) - \sigma_2(a)]r_N - \sigma_1(a)\, r_{N-1} + (\sum_\alpha b_\alpha + M - 1)\,\sigma_1^2(\lambda) - 2(\sum_\alpha b_\alpha + M - 2)\,\sigma_2(\lambda) +$$
$$+ (\sum_\alpha b_\alpha a_\alpha)\sigma_1(\lambda) + \sum_\alpha b_\alpha a_\alpha^2 \qquad (6в)$$

и т.д. Здесь σ_n — элементарные симметрические полиномы n-того порядка. Общая формула имеет вид $r_{N-n} = r_{N-n}(\sigma_1(\lambda), ..., \sigma_n(\lambda))$.

Отметим, что система (4) совпадает по форме с SU(2)-симметричными уравнениями анзатца Бете

$$\prod_k{}' S(\lambda_i - \lambda_k) = \Phi(\lambda_i), \quad i = 1, ..., M \qquad (7)$$

для некоторой M-частичной точно интегрируемой системы в квазиклассическом приближении. Числа λ_i выступают в качестве быстрот. Роль двухчастичной матрицы рассеяния играет функция $S(\lambda) = \exp(2i\lambda^{-1})$. Функция $\Phi(\lambda)$ содержит информацию о физической системе. Роль собственных значений M независимых интегралов движения играют M симметрических полиномов $\sigma_n(\lambda)$, первые N из которых связаны со спектральными параметрами r_n. Отметим также, что параметр r_N очевидным образом связан с оператором числа частиц в этой системе.

Введем функцию $F = \ln[\ \prod'_{m,k} (\lambda_m - \lambda_k)^2\ \prod_\alpha \prod_n\ (a_\alpha - \lambda_n)^{b_\alpha}]$. При этом условие

$$\partial F/\partial \lambda_i = 0, \quad i = 1, ..., M \qquad (8)$$

эквивалентно системе уравнений (4). Поэтому каждое решение последней можно интерпретировать, как особую точку функции F. Число этих особых точек равно (N + M)!/N!. Их положение зависит от констант связи a и b. При некоторых значениях констант связи особые точки сливаются и наступает вырождение. Это происходит, если

$$\det \| \partial^2 F/\partial\lambda_i \partial\lambda_k \| = 0. \qquad (9)$$

Таким образом, уравнения (8) и (9) определяют множество пространства констант связи, в точках которого происходит слияние ветвей вектор-функции $\vec{\lambda} = \vec{\lambda}(a, b)$, удовлетворяющей уравнению (4). Это множество представляет собой (2N + 1)-мерное многообразие. Назовем точку этого многообразия L-кратной, если в ней сливаются L ветвей фукции $\vec{\lambda}$. Соответствующее значение $\vec{\lambda}$ является особой точкой потенциала F индекса L. (Другими словами, число вращений векторного поля gradF в этой точке равно L.) По этой причине почти все особые точки кратности L являются корневыми точками ветвления L-того порядка. В окрестности этих точек L ветвей функции $\vec{\lambda}$ образуют единую риманову поверхность. Уравнения, определяющие множества этих точек, имеют вид системы (8), (9), дополненной (при $L > 2$) условиями

$$\sum_{i_1} \ldots \sum_{i_l} x_{i_1} \ldots x_{i_l} \partial^l F/\partial\lambda_{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial\lambda_{i_l}, \quad l = 3, ..., L, \qquad (10)$$

в которых x_i — собственный вектор матрицы $\partial_i \partial_k F$, соответствующий ее нулевому собственному значению. Указанные множества являются поэтому (2N + 3 − L)-мерными многообразиями.

Частными случаями кратных точек являются точки, в которых происходит слияние узлов волновых функций. Анализируя (4), можно показать, что узлы могут сливаться только в точках a_α, если значения соответствующих констант b_α равны − K. Отсюда, а также из того факта, что оператор в уравнении (1) эрмитов на множестве регулярных функций, квадратично интегрируемых с весом $\omega(\lambda) = (\lambda - a_1)^{b_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_M)^{b_M}$, следует, что при слиянии узлов гамильтониан перестает быть эрмитовым, система становится распадной. Следовательно, указанные кратные точки относятся к особым точкам "дайсоновского" типа. Полиномы σ_n в этих точках почти всегда регулярны. Это можно показать, заметив, что функция F является симметрической и зависит по этой причине только от полиномов σ_n. Поэтому уравнения (8) могут быть переписаны в виде

$$\sum_m (\partial F/\partial \sigma_m)(\partial \sigma_m/\partial \lambda_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, M. \tag{11}$$

Если узлы волновой функции совпадают, то $\det \| \partial\sigma_n/\partial\lambda_m \| = 0$, и, следовательно, система (11) имеет ненулевые решения ($\partial F/\partial\sigma_m \neq 0$), означающие, что точка $\vec{\sigma}$ является почти всегда регулярной (множество нулевых решений (11) есть множество меры нуль). Если узлы не совпадают, т.е. $\det \| \partial\sigma_m/\partial\lambda_i \| \neq 0$, то приходим к системе $\partial F/\partial\sigma_m = 0$, аналогичной (8). Ее удобно переписать в виде

$$\sum_a b_a z_a = 0, \quad \sum_a a_a b_a z_a = d_1,$$
$$\sum_a a_a^{k+1} b_a z_a = d_{k+1}\sigma_k + g_k(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, M. \tag{12}$$

Здесь d_k – величины, аналитически (регулярно) зависящие от констант связи; $g_k(\sigma)$ – алгебраические функции полиномов σ_n с регулярными по константам связи коэффициентами. Из первых $N + 2$ уравнений (12) находится вектор z_a, который, подставленный затем в оставшиеся уравнения, дает замкнутую систему алгебраических уравнений относительно σ_n. Из (12) видно, что в случае точно решаемых моделей ($N = 0$) вектор z_a не зависит от σ. Поэтому, все функции σ_n определяются однозначно и не имеют особенностей по константам связи. Таким образом, в точно решаемых моделях могут быть только "дайсоновские" особенности. Иное дело при $N \geqslant 1$. В этом случае z_a зависит от $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$, и уравнение относительно этих полиномов становится нелинейным. Можно показать, что оно имеет $(N + M)!/N!M!$ решений. Точки, в которых эти решения сливаются, являются "саймоновскими" особыми точками, так как в них полиномы σ_n а, следовательно, и спектральные параметры r_n (6) имеют корневые точки ветвления вплоть до $(2N + 3)$-го порядка. Все сказанное выше по поводу особенностей функции $\vec{\lambda}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ без изменения переносится на функции $\vec{\sigma}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Уравнения (8) – (10), в которых λ заменено на σ, определяют множества "саймоновских" точек.

Рассмотрим отдельно случаи, которым соответствуют бесконечные серии КТР моделей.

При $N = 1$ спектр системы определяется формулой (6б), и мы получаем КТР модели произвольного порядка M. Если $r_1 = -M_1M_2$ и $\sum_a b_a - 1 = -M_1 - M_2$, то риманова поверхность для энергий состоит из двух несвязных кусков, в которых переплетаются M_1 и $M_2 - M_1$ уровней. Если $\sum_a b_a - 1$ произвольно, то имеем единую риманову поверхность, в которой сплетаются M уровней и имеются "саймоновские" сингулярности вплоть до пятого порядка.

При $N = 2$ спектр системы определяется формулой (6в). Если $\sum_a b_a + M - 1 = 0$, то мы снова получаем серию КТР моделей произвольного порядка M. Риманова поверхность для энергий является в общем случае M-листной и при больших M имеет "саймоновские" сингулярности вплоть до шестого порядка.

В случаях $N = 1$ и $N = 2$ многообразия этих сингулярностей могут быть найдены в явном виде. В заключение заметим, что если положения "саймоновских" особенностей близки к вещественной оси, то возникает известное явление квазипересечения уровней.

Автор благодарен П.Б. Вигману за ценные замечания и В.Я. Файнбергу за интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 37 (1988).
2. Ушверидзе А. Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 40 (1988).
3. Турбинер А. В., Ушверидзе А. Г. Препринт ИТЭФ, № 55, М., 1987.
4. Турбинер А. В. Препринт ИТЭФ, № 67, М., 1987.

Поступила в редакцию 27 ноября 1987 г.