Краткие сообщения по физике № 3-1988 г.

УДК 530.145

ЛОКАЛЬНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЯ И ПРОПАГАТОР ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ ВО ВНЕШНЕМ НЕАБЕЛЕВОМ ПОЛЕ КАК СУММА ПО ПУТЯМ

А.В. Маршаков, В.Я. Файнберг

Требования калибровочной и репараметризационной инвариантности и локальной суперсимметрии позволяют построить классическое действие дираковской частицы во внешем неабелевом поле. Действие имеет матричную структуру и существенно нелокально. Исходя из этого действия получено представление в виде фейнмановского интеграла по "классическим" траекториям для соответствующего пропагатора.

Эта статья является развитием работ /1, 2/, где на основе тех же симметрий было найдено представление в виде суммы по траекториям для функции Грина дираковской частицы, удовлетворяющей уравнению первого порядка во внешнем электромагнитном поле. В /2/ было выписано аналогичное представление для пропагатора этой частицы во внешнем неабелевом поле. Однако инвариантность соответствующего "классического" действия относительно локальных суперпреобразований не является очевидной. Главная цель этой статьи – прояснить этот пункт. Специфика неабелева случая состоит в том, что калибровочно-инвариантным объектом, описывающим взаимодействие янг-миллсового поля с классическим током является вильсоновская P-экспонента, т.е. нелокальный объект. Но именно этот нелокальный объект позволяет построить в неабелевом случае как искомое "классическое" действие, так и представление пропагатора в виде суммы по путям.

В заключение обсуждается также репараметризационно-инвариантное и локально-суперсимметричное классическое действие дираковской частицы в искривленном пространстве-времени.

Исходным пунктом является действие /3/

$$S_0 = \int_0^1 dt\ \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}[e^{-1}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - i\psi^{\mu}\dot{\psi}^{\nu} - ie^{-1}\chi\dot{x}^{\mu}\psi^{\nu}],$$
$$\eta_{\mu\nu} = (-++\ldots+);\quad \mu,\nu = 0,1,\ldots,D-1, \tag{1}$$

инвариантное относительно следующих преобразований:

$$\delta_\epsilon x^\mu = \epsilon(t)\,\dot{x}^\mu,\quad \delta_\epsilon e = d/dt\,[\epsilon(t)\,e],$$
$$\delta_\epsilon \psi^\mu = \epsilon(t)\,\dot{\psi}^\mu,\quad \delta_\epsilon\chi = d/dt\,[\epsilon(t)\,\chi], \tag{2а}$$

$$\delta_\alpha x^\mu = i\alpha(t)\,\psi^\mu,\quad \delta_\alpha e = i\alpha(t)\,\chi,$$
$$\delta_\alpha\psi^\mu = \alpha(t)\,[\dot{x}^\mu - \frac{i}{2}\,\chi\psi^\mu]e^{-1},\quad \delta_\alpha\chi = 2\dot{\alpha}(t). \tag{2б}$$

В (1) и (2) α, χ, ψ^μ – грассмановы переменные; точка означает производную d/dt.

Введем янг-миллсово поле:

$$A_\mu = A^a_\mu t^a,\ F_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}t^a,\ [t^a, t^b]_- = f^{abc}t^c, \tag{3а}$$

$$F^a_{\mu\nu} = G^a_{\mu\nu} - igf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu,\ G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu. \tag{3б}$$

Нетрудно убедиться, что матричное действие

$$S = \int_0^1 d\tau(1/2)\,\eta_{\mu\nu}(e^{-1}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} - i\psi^{\mu}\dot{\psi}^{\nu} - ie^{-1}\chi\dot{x}^{\mu}\psi^{\nu}) + \log P\exp[ig\int_0^1 d\tau(\dot{x}^{\mu}A_{\mu} + (i/2)\,eF_{\mu\nu}\psi^{\mu}\psi^{\nu})] \tag{4}$$

будет инвариантным относительно калибровочных преобразований

$$A_{\mu}(x) \to \vec{\Omega}^{-1}(x)\,A_{\mu}(x)\,\vec{\Omega}(x) + (i/g)\,\vec{\Omega}^{-1}(x)\,\partial_{\mu}\vec{\Omega}(x), \tag{5}$$

если $\vec{\Omega}(x_0) = \vec{\Omega}(x_1)$, где $x_0 = x(0)$, $x_1 = x(1)$. Действие (4) инвариантно относительно репараметризации (2а).

Покажем, что оно также инвариантно при локальных суперпреобразованиях (2б). Разложим упорядоченную экспоненту в ряд:

$$P\exp[ig\int_0^1 d\tau(\dot{x}^{\mu}A_{\mu} + (i/2)\,eF_{\mu\nu}\psi^{\mu}\psi^{\nu})] = 1 + ig\,t^a\int_0^1 d\tau(\dot{x}^{\mu}A^a_{\mu} + (i/2)\,eF^a_{\mu\nu}\psi^{\mu}\psi^{\nu}) + (ig)^2\,t^a t^b \times$$

$$\times \int_0^1 d\tau\int_0^{\tau} d\tau'[\dot{x}^{\mu}A^a_{\mu} + (i/2)\,eF^a_{\mu\nu}\psi^{\mu}\psi^{\nu}](\tau)[\dot{x}^{\lambda}A^b_{\lambda} + (i/2)\,eF^b_{\lambda\sigma}\psi^{\lambda}\psi^{\sigma}](\tau') + \ldots$$

При вариации члена "первого порядка" имеем:

$$\delta_{\alpha}(\dot{x}^{\mu}A^a_{\mu} + \frac{i}{2}\,eF^a_{\mu\nu}\psi^{\mu}\psi^{\nu}) = \frac{d}{d\tau}(\delta_{\alpha}x^{\mu}A^a_{\mu}) + \delta_{\alpha}x^{\mu}\dot{x}^{\nu}G^a_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\,e\delta_{\alpha}x^{\lambda}\psi^{\mu}\psi^{\nu}\partial_{\lambda}F^a_{\mu\nu} - \delta_{\alpha}x^{\mu}\dot{x}^{\nu}F^a_{\mu\nu}.$$

При вариации члена "второго" порядка за счет членов, пропорциональных полной производной, появляется дополнительный вклад в "первый" порядок:

$$(ig)^2\,t^a t^b\int_0^1 d\tau[-\delta x^{\mu}A^a_{\mu}(\dot{x}^{\nu}A^b_{\nu} + (i/2)\,eF^b_{\nu\sigma}\psi^{\nu}\psi^{\sigma}) + (\dot{x}^{\mu}A^a_{\mu} + (i/2)\,eF^a_{\mu\nu}\psi^{\mu}\psi^{\nu})\delta x^{\lambda}A^b_{\lambda}] =$$

$$= -(ig)^2\,t^c f^{cab}\int_0^1 d\tau[\delta x^{\mu}A^a_{\mu}(\dot{x}^{\nu}A^b_{\nu} + (i/2)\,eF^b_{\nu\sigma}\psi^{\nu}\psi^{\sigma})].$$

Окончательно в первом порядке будем иметь:

$$ig\,t^a\int_0^1 d\tau\left\{\frac{d}{d\tau}(\delta x^{\mu}A^a_{\mu}) + \delta x^{\mu}\dot{x}^{\nu}(G^a_{\mu\nu} - ig\,f^{abc}A^b_{\mu}A^c_{\nu} - F^a_{\mu\nu}) + \frac{i}{2}\,e\alpha\psi^{\lambda}\psi^{\mu}\psi^{\nu}(\partial_{\lambda}F^a_{\mu\nu} - ig\,f^{abc}A^b_{\lambda}F^c_{\mu\nu})\right\} = 0$$

в силу граничных условий $\alpha(0) = 0$, $\alpha(1) = 0$, а также равенств (3б) и тождества Бианки.

Таким образом, действие (4) является нелокальным матричным объектом, инвариантным относительно всех преобразований: (2а), (2б) и (5).

Представление для пропагатора получается теперь усреднением упорядоченных экспонент /2/ (переход к евклидову пространству см. в /2/)

$$G(1,0|A) = \int De\,Dx\,\exp[-\int_0^1 dt\,\frac{1}{2}\,(\dot{x}^2_{\mu}/e + em^2)]P\exp[ig\int_0^1 dt\,\dot{x}^{\mu}A_{\mu}] \tag{6а}$$

— для массивной скалярной частицы и

$$\hat{G}(1,0|A) = \int DeD\chi DxD\psi e^{-S_0} P\exp[ig\int_0^1 dt(\dot{x}_\mu A_\mu + \frac{e}{2} F_{\mu\nu}\psi_\mu\psi_\nu)] \tag{6б}$$

— для частицы со спином 1/2.

Обсуждение граничных условий см. в /2/; континуальный интеграл в (6б) понимается как вейлевский символ оператора /4/.

В первом порядке по полю по аналогии с /2/ получим из (6б):

$$\hat{J}^a_\mu(1,0|x) = -\frac{i}{g}\frac{\delta\hat{G}(1,0|A)}{\delta A^a_\mu(x)}\Bigg|_{A=0} = \frac{2}{(2\pi)^{D/2}}\hat{G}(1,x)\gamma_\mu t^a\hat{G}(x,0),$$

$$[\gamma_\mu, \gamma_\nu]_+ = -\delta_{\mu\nu}.$$

Более громоздкие выкладки позволяют получить из (6а) и (6б) во втором порядке:

$$(-\frac{i}{g})^2\frac{\delta^2 G(1,0|A)}{\delta A^a_\mu(x)\delta A^b_\nu(y)}\Bigg|_{A=0} = \frac{2}{(2\pi)^D}G(1,x)t^a\overleftrightarrow{\partial}^x_\mu G(x,y)t^b\overleftrightarrow{\partial}^y_\nu G(y,0) +$$

$$+\frac{2}{(2\pi)^D}G(1,y)t^b\overleftrightarrow{\partial}^y_\nu G(y,x)t^a\overleftrightarrow{\partial}^x_\mu G(x,0) + \frac{2}{(2\pi)^{D/2}}\delta_{\mu\nu}[t^a,t^b]_+\delta^D(x-y)G(1,x)G(x,0), \tag{7а}$$

$$(-\frac{i}{g})^2\frac{\delta^2\hat{G}(1,0|A)}{\delta A^a_\mu(x)\delta A^b_\nu(y)}\Bigg|_{A=0} = \frac{2}{(2\pi)^D}(\hat{G}(1,x)t^a\gamma_\mu\hat{G}(x,y)t^b\gamma_\nu\hat{G}(y,0) + (a\leftrightarrow b, x\leftrightarrow y, \mu\leftrightarrow\nu)). \tag{7б}$$

Заменив в (7) матрицы t^a на единицы, получим выражение для абелева случая, т.е. для частицы в электромагнитном поле.

Подчеркнем, что вопрос о возможности локализации исходного "классического" действия (4) за счет введения дополнительных грассмановых степеней свободы, описывающих унитарный спин, остается открытым; трудность состоит в том, что они проявляются только в присутствии внешнего неабелева поля и как бы замораживаются, когда его нет.

Интересно попытаться обобщить результаты на случай искривленного пространства (частица в гравитационном поле). В статье /3б/ было выписано глобально суперсимметричное действие частицы во внешнем гравитационном поле. В случае нерелятивистской частицы со спином 1/2 роль глобальной суперсимметрии при упорядочивании операторов в первично-квантованном гамильтониане рассматривалась в /5/.

Для функции Грина скалярной нерелятивистской частицы в искривленном пространстве континуальный интеграл по траекториям обсуждался, например, в работе /6/. Проблема упорядочивания и локальной меры становится здесь решающей. Мы выпишем лагранжиан релятивистской частицы в кривом пространстве, исходя из требований калибровочной и локально-суперсимметричной инвариантности. Покажем, что таким свойством обладает лагранжиан

$$\mathcal{L} = (1/2)g_{\mu\nu}(x(t))[\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu e^{-1} - i\psi^\mu\dot{\psi}^\nu - ie^{-1}\chi\dot{x}^\mu\psi^\nu] - (i/2)\Gamma_{\mu,\nu\lambda}\psi^\mu\psi^\nu\dot{x}^\lambda,$$

$$\Gamma_{\mu,\nu\lambda} = (1/2)(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\nu\lambda}).$$

Репараметризационная симметрия соответствующего действия очевидна. Инвариантность относительно (2б) доказывается прямым вычислением:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} = {} & \frac{d}{dt}\left\{\frac{i}{2e}\, a\dot{x}^{\mu}\psi^{\nu}g_{\mu\nu}(x) - \frac{i}{2}\,\Gamma_{\mu,\nu\lambda}\psi^{\mu}\psi^{\nu}\delta x^{\lambda} + \frac{i}{2}\,\Gamma_{\mu,\nu\lambda}\psi^{\mu}\psi^{\nu} i a\psi^{\lambda}\right\} + \\
& + \frac{ia}{2e}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}\psi^{\lambda}(\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - \partial_{\nu}g_{\mu\lambda}) + \frac{1}{2}\,\partial_{\lambda}g_{\mu\nu}a\psi^{\lambda}(\psi^{\mu}\dot{\psi}^{\nu} + e^{-1}\chi\dot{x}^{\mu}\psi^{\nu}) - \\
& - \frac{i}{2}\,\partial_{\sigma}\Gamma_{\mu,\nu\lambda} i a\psi^{\sigma}\psi^{\mu}\psi^{\nu}\dot{x}^{\lambda} - \frac{i}{2}\,\Gamma_{\mu,\nu\lambda}(\delta\psi^{\mu}\psi^{\nu}\dot{x}^{\lambda} + \psi^{\mu}\delta\psi^{\nu}\dot{x}^{\lambda}) =
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{d}{dt}\left(\frac{ia}{2e}\dot{x}^{\mu}\psi^{\nu}g_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\,a\psi^{\mu}\psi^{\nu}\psi^{\lambda}\dot{x}^{\sigma}(\partial_{\lambda}\Gamma_{\mu,\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\mu,\nu\lambda}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ia}{2e}\dot{x}^{\mu}\psi^{\nu}g_{\mu\nu}(x(t))\right).
$$

При интегрировании по t последний член исчезает, так как $a(0) = 0$, $a(1) = 0$.

Вопросы упорядочивания операторов при первичном квантовании и представление функции Грина частицы в кривом пространстве в виде суммы по путям будут изложены в другой статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маршаков А. В., Файнберг В. Я. Письма в ЖЭТФ, **46**, 253 (1987).
2. Fainberg V. Ya., Marshakov A. V. Lebedev Inst. Preprint № 338, M., 1987.
3. a) Brink L. et al. Phys. Lett., **64B**, 435 (1976).
   b) Brink L., Di Vecchia P., Howe P. Nucl. Phys., **B118**, 76 (1977).
4. Berezin F. A., Marinov M. S. Ann. of Phys., **104**, 336 (1977).
5. De Alfaro V. et al. Preprint CERN–TH 4849/87, 1987.
6. Mizrahi M. M. J. Math. Phys., **16**, 2201 (1975).

Поступила в редакцию 21 декабря 1987 г.