

ВОССТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕЩЕСТВА ПО ОСЦИЛЛЯЦИЯМ НЕЙТРИНО

В.К. Ермилова, В.А. Царев, В.А. Чечин

Для малых углов смешивания решена обратная задача для осцилляций нейтрино в веществе. Проведен машинный эксперимент по определению профиля распределения плотности вдоль диаметра Земли.

Осцилляции нейтрино $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_e$ в веществе с переменной плотностью $\rho(x)$ можно описать уравнением второго порядка для амплитуды $\psi(x)$ /1-3/

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + (k^2 - V(k, x)) \psi = 0, \quad (1)$$

где $k = \pi/l_0$; $l_0 = 4\pi E/\Delta m^2$ — вакуумная длина осцилляций нейтрино с энергией E ; $V(k, x) = \frac{2k \cos 2\theta}{l(x)} - \frac{1}{l^2(x)} - i \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{l(x)} \right)$; $l(x) = \sqrt{2}/GN_e(x)$ — длина Вольфенштейна; G — константа Ферми; $N_e(x) \approx \rho(x)N_A/2$ — плотность электронов вещества ($\hbar = c = 1$). Параметры вакуумных осцилляций θ и Δm^2 считаем заданными. Решая уравнение (1) при начальных условиях

$$\psi(0) = 0, \quad d\psi(0)/dx = i k \sin 2\theta, \quad (2)$$

получим вероятность перехода $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$: $P_k(x) = |\Psi(x)|^2$.

В работах /1-3/ показано, что учет неоднородности среды может привести к кардинальному изменению картины осцилляций по сравнению со случаем однородной среды (в частности, для Солнца и Земли). Вероятность $P_k(x)$ оказывается весьма чувствительной к вариациям плотности. Несомненный практический интерес, например, для нейтринной томографии Земли, представляет решение обратной задачи — восстановление плотности $\rho(x)$ по экспериментально измеренной $P_k(D)$ как функции $k \sim 1/E$ при фиксированном $x = D$. С точки зрения "уравнения Шредингера" (1) эта проблема представляет собой аналог обратной задачи рассеяния в квантовой механике при фиксированном орбитальном моменте /4/. Однако прямое использование стандартных методов обратной задачи невозможно для (1), так как эффективный потенциал $V(k, x)$ комплексный и зависит от k .

Рассмотрим наиболее интересный с практической точки зрения случай $\sin 2\theta \ll 1$. Уравнение (1) при $\cos 2\theta \rightarrow 1$ имеет очевидное решение, удовлетворяющее начальным условиям (2):

$$\psi_k(x) \cong k \sin 2\theta \int_0^x \exp \left\{ i \left[\tilde{\varphi}(x') - \tilde{\varphi}(x) / 2 \right] \right\} dx'; \quad (3)$$

$$\tilde{\varphi}(x) = 2 \int_0^x dx' (1/l(x') - k).$$

Считаем, что распределение плотности симметрично относительно центра: $\rho(x) = \rho(D - x)$, тогда для точки наблюдения $x = D$ имеем:

$$\psi_k(D) = q \sin 2\theta f(q); \quad f(q) = \int_0^1 \cos[\varphi(\xi) - q\xi] d\xi; \quad (4)$$

$$q = kD; \quad \varphi(\xi) = \frac{GN_{\Delta} D}{2\sqrt{2}} \int_0^{\xi} \rho(\xi') d\xi'.$$

В данном случае $\psi_k(D)$ вещественна (что не зависит от приближения (3)), поэтому, если известна вероятность $P_k(D)$, то $\psi_k(D) = \pm \sqrt{P_k(D)}$. Знак перед корнем меняется при каждом переходе функции $P_k(D)$ через нуль. Обратная задача сводится к решению интегрального уравнения (4) и дифференцированию полученной функции $\varphi(\xi)$.

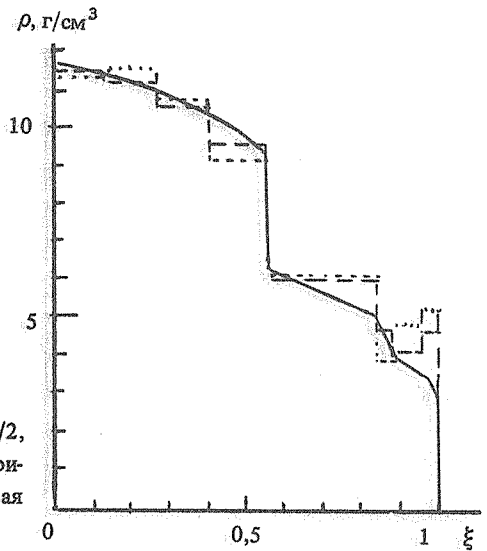


Рис. 1. Распределение плотности вдоль диаметра Земли ($\xi = (x - D/2)/D/2$, $D = 12800$ км). Сплошная кривая – исходное распределение плотности, штриховая кривая – восстановленная плотность $0 < q < 100$; пунктирная кривая $0 < q < 20$.

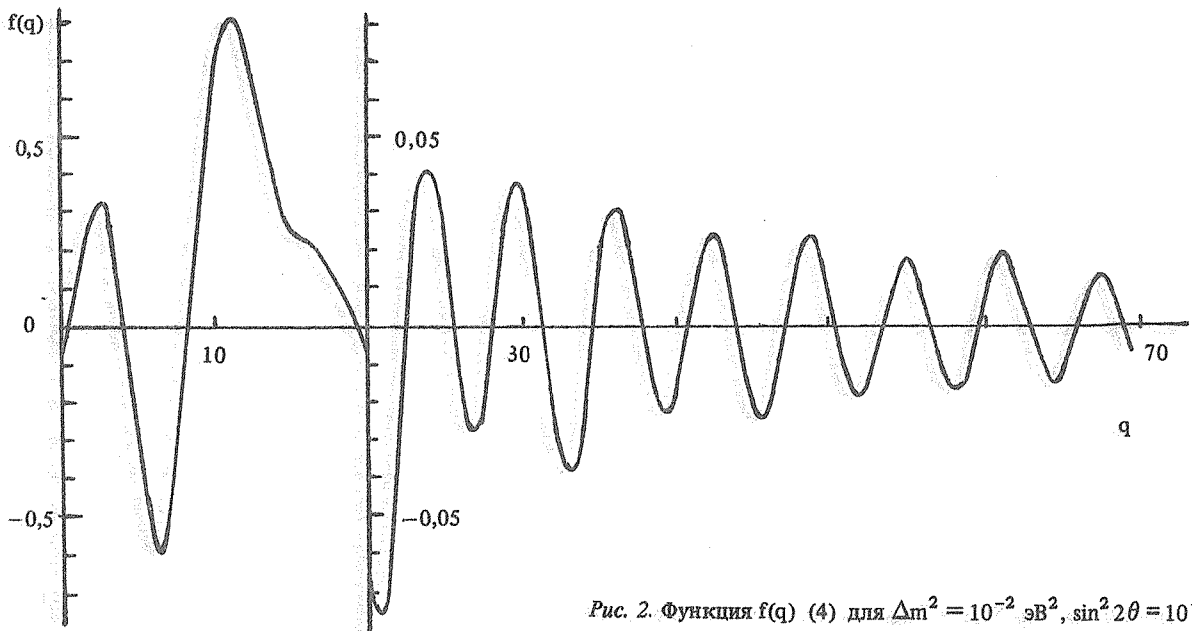


Рис. 2. Функция $f(q)$ (4) для $\Delta m^2 = 10^{-2}$ эВ², $\sin^2 2\theta = 10^{-2}$.

Уравнение (4) имеет вид преобразования Фурье, заданного лишь при $q > 0$ ($0 < E < \infty$). Если бы плотность была постоянной, то $\varphi(\xi) = \varphi(1) \xi$ и $f_0(q) = [\sin(q - \varphi(1))]/(q - \varphi(1))$.

Для случая $\varphi(1) \gg 1$ разумно следующим образом доопределить $f(q)$ при $q < 0$: $f(q < 0) = f_0(q)$. Тогда $f(q) - f_0(q)$ при $q < 0$ обращается в нуль и обратное преобразование Фурье дает:

$$\int_0^{\infty} dq \left[f(q) - \frac{\sin(q - \varphi(1))}{q - \varphi(1)} \right] \sin q \xi = \pi \left\{ \sin \varphi(\xi) - \sin [\varphi(1) \xi] \right\}. \quad (5)$$

Была проведена численная проверка описанного метода. Для этого в качестве $\rho(x)$ использовалось распределение плотности вдоль диаметра Земли D , показанное на рис. 1. При $\int_0^D \rho(x) dx = 1,3 \cdot 10^{10}$ г/см² параметр $\varphi(1) = 9,35$, что оправдывает используемое выше определение $f(q < 0)$. При $\Delta m^2 = 10^{-2}$ эВ², $\sin^2 2\theta = 10^{-2}$ решалось уравнение (1), или же использовалось решение (3); результаты близки (рис. 2). Полученное $f(q)$ подставлялось в (5), откуда находилась функция $\varphi(\xi)$, а затем дифференцированием определялось $\rho(\xi)$. Использовались два интервала по q : $0 < q < 100$ ($E > 1,6$ ГэВ) и $0 < q < 20$ ($E > 8$ ГэВ); последний интервал более адекватен измеряемой в эксперименте функции $P_K(D)$. Как видно из рис. 1, приближенное решение обратной задачи передает основные черты искомого распределения $\rho(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Михеев С. П., Смирнов А. Ю. ЯФ, 42, № 6, 1441 (1985).
2. Ермилова В. К., Царев В. А., Чечин В. А. Письма в ЖЭТФ, 43, 353 (1986).
3. Михеев С. П., Смирнов А. Ю. УФН, 153, вып. 1, 3 (1987).
4. Шадап К., Сабатъе П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М., Мир, 1980, с. 480.

Поступила в редакцию 29 декабря 1987 г.