*Краткие сообщения по физике № 4-1988 г.*

УДК 539.171

# НЕЭЙКОНАЛЬНЫЕ ПОПРАВКИ В ЗАДАЧЕ РАССЕЯНИЯ НА СИЛЬНОПОГЛОЩАЮЩИХ ПОТЕНЦИАЛАХ

В.И.Беляк

*С учетом двух неэйкональных поправок получены сечения рассеяния и поглощения на адрон-ядерных оптических потенциалах с сильным краевым поглощением. Определены эффективные параметры разложения сечений. Рассмотрен переход к классическому пределу для упругого рассеяния.*

В случае квазиклассического рассеяния на сильнопоглощающих адрон-ядерных оптических потенциалах с размытым краем основную роль играют " хвосты" этих потенциалов /1/. В /2/ с помощью метода эйконального разложения рассматривалось рассеяние на потенциалах, "хвосты" которых представлялись в виде разложения по степеням экспоненты, в частности, на потенциале Вудса – Саксона. В настоящей работе продолжено рассмотрение /2/; при этом неэйкональные поправки первого и второго порядка вычисляются исходя из эйконального разложения квазиклассических фаз рассеяния с учетом высших приближений.

Будем описывать рассеяние уравнением $[\nabla^2 + k^2 n^2(r)]\Psi(r) = 0$, где $n(r) = [1 - u(r)]^{1/2}$ – показатель преломления; $u(r)$ – безразмерный потенциал, связанный с оптическим потенциалом. Предположим, что в области краевых $r > R$

$$u(r) = -\bar{u} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} A_n \exp\left(-n\,\frac{r-R}{a}\right),\; A_1 = 1,\; |A_n| \sim 1;$$

$$ka \gg 1,\; a/R \ll 1,\; \operatorname{Im} q(R) \gg 1,\; q(b) = k\bar{u}\sqrt{ab}\,. \tag{1}$$

Для потенциала Вудса – Саксона $A_n = 1$. Условие на $q(R)$ означает наличие сильного краевого поглощения.

Амплитуду рассеяния представим в виде $f(\theta) = \int_0^\infty db\, F(\theta,b)\,[\exp(2i\delta(b))]'$,

$F(\theta,b) = (1/k) \sum\limits_{0 \leqslant n < kb-1/2} (n+1/2) P_n(\cos\theta)$, $\delta(b) \equiv \delta_l$ – $l$-ая фаза рассеяния, $b = (l+1/2)/k$;

$$F(\theta,b) \approx F_0(\theta,b) = (ib/\sqrt{\theta \sin\theta})\, J_1(\kappa b),\; \kappa = k\theta. \tag{2}$$

Приближение (2) соответствует замене суммирования на интегрирование и $P_l(\cos\theta)$ на $(\theta/\sin\theta)^{1/2} J_0((l + 1/2)\theta)$.

При $\kappa R \gg 1$ для существенных в рассматриваемой задаче $b > R$ имеем $F(\theta,b)^{as} = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} F_0(\theta_m,b)^{as}$, $\theta_m \equiv \theta + 2\pi m$ (индекс as указывает на пренебрежение величинами $\sim 1/\kappa b$), т.е. учет отличия суммирования от интегрирования приводит на языке амплитуды $f_0(\theta)^{as}$, порождаемой $F_0(\theta,b)^{as}$, к "дополнительному" рассеянию на углы $\theta_{m\neq 0}$. Этот эффект сохраняется в менее явном виде и при $\kappa R \lesssim 1$. "Дополнительное" рассеяние в рассматриваемой задаче должно давать экспоненциально малый вклад, причем даже в предельном случае вещественного потенциала (так как и при этом углы $\theta_{m\neq 0}$ находятся в классически запрещенной области, если нет закручивания). Уточнение указанной замены для $P_l(\cos\theta)$ приводит к $F_0(\theta,\tilde{b})$, $\tilde{b} \equiv$

$\equiv b[1-(\mathrm{ctg}\theta-1/\theta)/8\theta(kb)^2]$. Однако получаемые поправки к $F_0(\theta,b)$ оказываются за рамками используемых далее приближений.

В случае (1) существенный вклад в $f(\theta)$ дают $b>R$ и $f(\theta)$ сводится к интегралу по линии $L_\infty$ наибыстрейшего спада $\exp[2i\delta(b)]$ (строго говоря, с учетом поведения $F_0(\theta,b)$), исходящей из $+\infty$,

$$f(\theta)=-\int_{L_\infty} db F_0(\theta,b)[\exp(2i\delta(b))]'. \tag{3}$$

Фазы $\delta(b)$ вычислим, разлагая их квазиклассические с учетом высших приближений выражения $\delta(b)_1+\delta(b)_2+\ldots$ по степеням $\bar{u}$, $u(r)\propto\bar{u}$. Первый член разложения фазы $\delta(b)_1$ соответствует эйкональному приближению. Первый член $\delta(b)_2$ имеет вид $\delta(b)_2^{(0)}=(1/48k)\int_b^\infty dr[r^2u''(r)+3ru'(r)]'/\sqrt{r^2-b^2}$. Используя также разложение (1) для $u(r)$, получим при $b>R$

$$\delta(b)=\delta(b)^{(0)}\left\{[1+(3/8)(a/b)+\ldots]+\omega(b)^{(0)}+\omega(b)[2i\delta(b)^{(0)}]+\omega(b)^{(2)}[2i\delta(b)^{(0)}]^2+\ldots\right\},$$

$$i\delta(b)^{(0)}=\sqrt{\pi/8}\,q(b)\exp[-(b-R)/a],\quad \omega(b)=(i/\sqrt{\pi})(A_2/q(b)-\eta(b)/2),\quad \eta(b)=(1/ka)\sqrt{b/a}, \tag{4}$$

$$\omega(b)^{(2)}=(1/\pi)[-(2/\sqrt{3})A_3/q^2(b)+\sqrt{3}A_2\eta(b)/q(b)-(\sqrt{3}/4)\eta^2(b)],\quad \omega(b)^{(0)}=(1/24)\eta^2(b).$$

Здесь неэйкональные поправки, порождаемые $\delta(b)_1$ и $\delta(b)_2$, дают соответственно вклады $\propto\eta(b)\delta(b)^{(0)}\sim$ $\sim u(b)b/a$ и $\sim\eta^2(b)$. Поправки, возникающие вследствие неэкспоненциальности края потенциала, дают вклад $\propto\delta(b)^{(0)}/q(b)\sim\exp[-(b-R)/a]$. Так как $\delta(b)^{(0)}\sim\max(1,\kappa a)$, $b\sim R$ в существенной для $f(\theta)$ области интегрирования, то эффективными параметрами эйконального разложения становятся квазиклассический параметр $\eta(R)$ и классический параметр $\eta(R)\kappa a=\theta\sqrt{R/a}$ (в которые потенциал не входит). Эффективными параметрами разложения также становятся $|1/q(R)|$ и $|\kappa a/q(R)|$.

Из (3), (4) получим аналогично /2/ с учетом величин $\sim(\kappa a)^n|\omega|^2(n\geqslant1)$, а также $\sim(a/R)|\omega|^2$ при $\kappa a\ll1$ и $\sim(a/R)\ln\kappa a$ при $\kappa a\gg1$ ($|\omega|\sim\eta+1/|q|$)

$$f(\theta)=(ib_{ef}/\sqrt{\theta\sin\theta})g(\kappa)J_1(\kappa b_{ef}),\quad g(\kappa)=g(\kappa)^{(0)}\exp[-(\kappa\bar{a})^2\Omega_g],\quad g(\kappa)^{(0)}=\sqrt{\pi\kappa\bar{a}/\mathrm{sh}\pi\kappa\bar{a}},$$

$$b_{ef}=b_{ef}^{(0)}-\bar{a}\Omega_b,\quad b_{ef}^{(0)}=b_2-\arg\Gamma(1+i\kappa\bar{a})/\kappa,\quad b_2=b_{2R}-i\bar{a}\xi,\quad \xi=\mathrm{arctg}(\mathrm{Re}\bar{u}/\mathrm{Im}\bar{u}),$$

$$b_{2R}=b_{1R}+(\bar{a}/2)\ln(b_{1R}/R)+(3/8)(a^2/b_{1R}),\quad b_{1R}=R+a\ln(\sqrt{\pi/2}\,|q(R)|),\quad \bar{a}=a(1+a/2b_{1R}), \tag{5}$$

$$\exp[-(\kappa\bar{a})^2\Omega_g]=(1/\sqrt{1+(\kappa\bar{a}\omega)^2})\exp[-\kappa\bar{a}\,\mathrm{arctg}\kappa\bar{a}\omega-3(\kappa\bar{a})^2(3\omega^2/2-\omega^{(2)})],$$

$$-\kappa\bar{a}\Omega_b=\kappa\bar{a}\omega^{(0)}-\mathrm{arctg}\kappa\bar{a}\omega+(\kappa\bar{a}/2)\ln[1+(\kappa\bar{a}\omega)^2]+(\kappa\bar{a})[(\kappa\bar{a})^2-2](3\omega^2/2-\omega^{(2)}),$$

где для поправочных членов $\propto\eta(b)$, $1/q(b)$ используется обозначение $\eta\equiv\eta(b_{2R})$, $\omega\equiv\omega(b_{2R})$ и . Для $\Omega_{b,g}$ можно ограничиться квадратичным приближением по $\eta$, $1/q$

$$\Omega_{b,g} = \omega + \Delta\Omega_{b,g},\ \Delta\Omega_b = [-\nu_b + \widetilde{\nu}_b(\kappa\overline{a})^2]\eta^2 - 2cA_2[1 + (\kappa\overline{a})^2/\sqrt{3}]\eta/q\ +$$

$$+ [-3A_2^2 + (4/\sqrt{3})A_3 + (\kappa\overline{a})^2(2A_2^2 - (2/\sqrt{3})A_3)]/\pi q^2,\ \Delta\Omega_g = \nu_g(\eta^2 - 4A_2\eta/q) + (-5A_2^2 + 2\sqrt{3}A_3)/\pi q^2, \quad (6)$$

$$c \equiv \sqrt{3}/\pi - 3/2\pi,\ \nu_b = 1/24 - c/2,\ \widetilde{\nu}_b = c/2\sqrt{3},\ \nu_g = (3\sqrt{3} - 5)/4\pi,\ \nu \sim 0{,}01.$$

Здесь $\Omega_b$ отличается от аналогичной величины в /2/ на слагаемое $(1/24)(\kappa\overline{a}\eta)^2$, принадлежащее к неэйкональным поправкам второго порядка. В /2/ такие поправки вычислялись в формализме /3/, в котором $\kappa$ следует брать в виде $2k\sin(\theta/2)$ (а не $k\theta$). Указанные различия в неэйкональных поправках и в виде $\kappa$ взаимно компенсируются в амплитуде $f(\theta)$ в рассматриваемом приближении. Таким образом результат /2/ с использованием $\kappa = 2k\sin(\theta/2)$ совпадает с настоящим.

Амплитуда $f(\theta)$ (5) имеет дифракционный характер /2/. Однако при $\kappa a \gg 1$ ее можно интерпретировать как амплитуду классического рассеяния, обобщенную на случай наличия поглощения и, как следствие этого, на область классически запрещенных углов. Она порождается двумя комплексными точками перевала* $b_s^{(\pm)} = (b_{2R} - \overline{a}\ln\kappa\overline{a}) - i\overline{a}(\xi \mp \pi/2)$ интеграла (3) (поправки $\propto \eta$, $1/q$ здесь не выписываем), которым соответствуют сходящиеся перевальные разложения. Сумма первых членов этих разложений (обобщенная классическая амплитуда) пропорциональна $\cos[\kappa(\mathrm{Re}\,b_s^{(+)} + \overline{a} - i\overline{a}\xi)]\exp(-\pi\kappa\overline{a}/2)$ и приводит в сечении $|f(\theta)|^2$ к неосциллирующей части $\propto$ $\mathrm{sh}^2(\kappa\overline{a}\xi)\exp(-\pi\kappa\overline{a})$ и осциллирующей части $\propto \cos^2[\kappa(\mathrm{Re}\,b_s^{(+)} + \overline{a})]\exp(-\pi\kappa\overline{a})$. Неосциллирующая часть сечения затухает медленнее, чем осциллирующая, если вещественная часть потенциала сравнима с мнимой. В предельном случае вещественного потенциала ($|\xi| = \pi/2$) одна из точек перевала становится вещественной, и сечение сводится к неосциллирующей экспоненциально не затухающей части — обычному классическому сечению в рассматриваемом приближении.

Поправки, возникающие из-за неэйкональности и неэкспоненциальности края потенциала, дают в $f(\theta)$ вклады $\sim |\omega|(a/R)$, $|\omega|(\kappa a)^{1;\,2}$, параметрами их разложения являются $|\omega|$ и $|\omega|(\kappa a)$. В рассмотренном классическом пределе учитываются вклады $\sim |\omega|(\kappa a)^{1;\,2} \propto k^{0;\,1}$, параметром разложения становится $|\omega|(\kappa a) \propto k^0$ (т.е. $\theta\sqrt{R/a}$ и $|\theta/\overline{u}|\sqrt{a/R}$); при этом поправки $\sim |\omega|(\kappa a)^2$, $|\omega|^2(\kappa a)^3$, которые пропорциональны $k \propto 1/\hbar$, входят в показатели экспонент амплитуды $f(\theta)$. Остальные поправки в амплитуде (5) могут быть помещены в предэкспоненциальные множители, в частности (что согласуется и с видом $\Omega_b$ в (5)), поправка $\sim \omega\kappa a$ из $\kappa b_{ef}$. Соответственно эта поправка по существу не участвует в формировании эффекта экспоненциального затухания сечения. При $\kappa a \lesssim 1$ амплитуду $f(\theta)$ (5) можно разложить по степеням всех поправок $\propto \eta$, $1/q$ в рамках учета квадратичных по $\eta$, $1/q$ величин. Отметим, что неэйкональные поправки второго порядка по $\eta$ порождаются фазой $\delta(b)_1$, получаемой в первом квазиклассическом приближении, и добавкой $\delta(b)_2$, возникающей при учете второго квазиклассического приближения. Но поправки $\sim \eta^2(\kappa a)^{2;\,3} \propto k^{0;\,1}$, порождаемые $\delta(b)_1$, входят в классический предел $f(\theta)$, а поправка $\sim \eta^2(\kappa a) \propto k^{-1}$, порождаемая $\delta(b)_2$, не входит.

В согласии с требованием, налагаемым классическим пределом, амплитуду $f(\theta)$ в рамках учета поправок первого порядка можно записать в виде

$$f(\theta) = (ib_{ef}^{(0)}/\sqrt{\theta\sin\theta})g(\kappa)^{(0)}\exp[-(\kappa\overline{a})^2\omega]\left\{J_1(\kappa b_{ef}^{(0)}) - (\kappa\overline{a}\omega)J_0(\kappa b_{ef}^{(0)})\right\}.$$

Приведем выражение для сечения поглощения с учетом величин $\sim (a/R)^2$, $(a/R)(\eta + 1/q_I)^2$

---

* При $k \to \infty$ ($\hbar \to 0$) выражения для точек перевала $b_s^{(\pm)}$ могут быть получены из $(b_2 - a^2/2b_{1R})$ (5) заменой $|q(R)|$ на $|q(R)|/\kappa a$ и $\xi$ на $\xi \mp \pi/2$, поправки $\eta(b_{2R})$, $1/q(b_{2R})$ заменяются на $\eta(\mathrm{Re}\,b_s^{(+)})$, $1/q(\mathrm{Re}\,b_s^{(+)})$.

$$\sigma_a = \pi \mathcal{R}_a^2, \quad \mathcal{R}_a = \mathcal{R}_a^{(0)} + \Delta\mathcal{R}_a, \quad \mathcal{R}_a^{(0)} = b_{2a} + \gamma \bar{a} + (\pi^2/12)(a^2/b_{2a}),$$

$$\Delta\mathcal{R}_a = a\left\{(1/2\sqrt{\pi})\,\tilde{\xi}\eta - (\nu_a' + \nu_a''\tilde{\xi}^2)\eta^2 - cA_2\tilde{\xi}\eta/q_I - A_2/2\sqrt{\pi}\,q_I + (4A_3/\sqrt{3} - 3A_2^2)/4\pi q_I^2\right\}, \tag{7}$$

$$\tilde{\xi} = \mathrm{Re}\,\bar{u}/\mathrm{Im}\,\bar{u}, \quad q_I = \mathrm{Im}\,q, \quad \nu_a' = \sqrt{3}/8\pi - 1/24, \quad \nu_a'' = (3/8\pi)(2-\sqrt{3}).$$

Здесь $\gamma = 0{,}5772$ – постоянная Эйлера, $A_n$ считаются для простоты вещественными; $b_{2a}$ отличается от $b_{2R}$ (5) заменой $|q(R)|$ на $2\mathrm{Im}\,q(R)$, при этом $b_{2a} = b_{2R} + \Delta b$, $\Delta b = \bar{a}\ln(2/\sqrt{1+\tilde{\xi}^2})$. Соответственно $\mathcal{R}_a^{(0)} = \mathcal{R}_t^{(0)} + \Delta b + (a^2/2b_{2R})\xi^2$, где $\mathcal{R}_t^{(0)}$ – эффективный радиус для $\sigma_{tot}$ /2/ без учета поправок, пропорциональных $\eta$, $1/q$. Выражение $\sigma_a$ как функция $\bar{u}$ и $\tilde{\xi}$ при замене $\tilde{\xi}$ на i переходит в $(2\pi/ik)\,f(0)$. Поправки, возникающие из-за неэкспоненциальности и неэйкональности края потенциала, дают в $\sigma_a$ (7) вклады $\sim (a/Rq_I)$, $(a/R)\tilde{\xi}\eta$, $(a/R)\eta^2$, параметрами их разложения являются $1/q_I$, $\eta$ (а также $\tilde{\xi}\eta$). Неэйкональные поправки второго порядка в $\sigma_a$ подавлены за счет численных коэффициентов ($\nu_a \approx 0{,}03$), хотя и в меньшей степени, чем в $\sigma_{tot}(\nu_b = \nu_a'' - \nu_a' \approx 0{,}005)$. Поправки $\propto \tilde{\xi}\eta$ увеличивают (уменьшают) $\sigma_a$ в случае наличия притяжения (отталкивания), поправки $\propto \eta^2$ уменьшают $\sigma_a$ (что объясняется соответственно увеличением (уменьшением) пробега частиц в области поглощения и отражением).

Полученные результаты представляют интерес при рассмотрении рассеяния дифракционного характера и применимы, в частности, при анализе рассеяния антинуклонов и мезонов средней энергии на ядрах.

Автор благодарит Г.М.Ваградова и Д.А. Заикина за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson M. B., Bethe H. A. Comments Nucl. Part. Phys., 8, 75 (1978); Germond J. F., Johnson M. B. Phys. Rev., C22, 1622 (1980).
2. Беляк В. И. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 12, 43 (1986); № 5, 3 (1987).
3. Wallace S. J. Ann. Phys., 78, 190 (1973).

Институт ядерных исследований АН СССР

Поступила в редакцию 30 декабря 1987 г.