Краткие сообщения по физике № 4-1988 г.

УДК 535.36:513.583.3

РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДВОЯКОВОГНУТОМ ДИСКЕ

Н.П.Коротков

Решена задача о рассеянии плоской электромагнитной волны при нормальном падении на вогнутый диск. Получены аналитические выражения для амплитуды рассеянного излучения, сечений ослабления и поглощения. Рассмотрена зависимость сечения поглощения от формы частицы на примере красной кровяной клетки (эритроцита) при моделировании ее двояковогнутым диском.

В последнее время появилось немало работ, в которых рассматриваются различные аспекты рассеяния светового излучения на телах некоторых форм. В основном это работы, посвященные рассеянию на сферах и некоторых несферических телах (сфероидах и цилиндрах, произвольно ориентированных относительно падающей волны /1, 2/) в приближениях Рэлея – Ганса и аномальной дифракции. Однако для частиц других форм не получено аналитических решений, удобных для вычислений. В работе /3/ разработан метод протяженных граничных условий, описывающий рассеяние на диэлектрических частицах различной формы, размеры которых по отношению к длине волны падающего излучения лежат между областью Рэлея и областью геометрической оптики. Однако ряд, входящий в выражение для рассеянного поля, очень сложен, и расчеты приходится делать на ЭВМ. Кроме того, для вогнутых частиц с большой кривизной ряд плохо сходится, и расчеты приводят к приблизительным оценкам /4/.

Таким образом, практически отсутствуют удобные методы для расчета рассеянного поля и микроскопических характеристик вогнутых частиц, и часто приходится прибегать к модели эквивалентных сфер /5/.

В настоящей работе в приближении ВКБ получено решение задачи о рассеянии плоской волны на вогнутых частицах, поверхность которых описывается некоторой аналитической функцией. Полученные выражения для амплитуд рассеянного поля и сечений частицы на примере вогнутого диска легко поддаются вычислениям, не требующим привлечения ЭВМ.

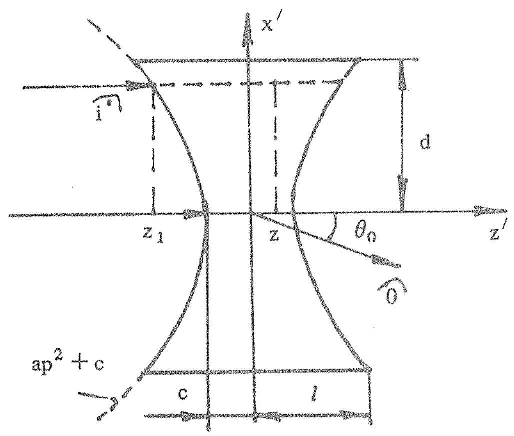

Рис. 1. Геометрия задачи.

Рассмотрим случай нормального падения плоской волны на двояковогнутый диск (рис. 1). Будем искать угловую зависимость рассеянного излучения и сечения частицы в приближении ВКБ, которое справедливо при условии $kD(\epsilon_r - 1) \gg 1$, $\epsilon_r - 1 < 1$, где D – характерный размер частицы в направлении падающего излучения, $\epsilon_r = \epsilon'_r + i\epsilon''_r$ – относительная диэлектрическая проницаемость частицы. В этом приближении выражения для амплитуды рассеянного излучения f, сечений ослабления σ_t и поглощения σ_a имеют вид /6/:

$$f(\hat{o},\hat{i}) = \frac{k^2}{4\pi} \; [\hat{o} \times (\hat{o} \times \hat{e}_i)] VS(\hat{o},\hat{z}), \tag{1}$$

$$S(\hat{o},\hat{z}) = V^{-1} \int_V 2(n-1) \exp[ikz_1 + ikn(z - z_1) - ikr \cdot \hat{o}] dV, \tag{2}$$

$$\sigma_t = k \operatorname{Im} \int_V 2(n-1) \exp[-ik(n-1) z_1 + ik(n-1) z] \, dV, \tag{3}$$

$$\sigma_a = k \int_V \frac{4\epsilon''_r}{|n+1|^2} \exp[-2kn_i(z - z_1)] dV, \tag{4}$$

где $\hat{i}$, $\hat{o}$ – направления распространения падающей и рассеянной волн; $n = n_r + in_i$ – относительный показатель преломления частицы; $k = 2\pi/\lambda_0$; λ_0 – длина волны в среде; смысл z_1 понятен из рис. 1. Рассмотрим выражение (2), действительная часть которого описывает угловую зависимость рассеянного излучения. Введем вектор $k = k\hat{o}$. Тогда $k \cdot r = k_1 x + k_2 y + k_3 z$, где k_1, k_2, k_3, записанные в сферической системе координат, имеют вид:

$$k_1 = k \sin\theta_0 \cos\phi_0; \quad k_2 = k \sin\theta_0 \sin\phi_0; \quad k_3 = k(1 - \cos\theta_0). \tag{5}$$

Поверхность вогнутого диска в любой секущей плоскости, параллельной оси Oz, можно описать параболой с параметрами a и c, т.е. $z_1 = (a\rho^2 + c)$. Перейдем в цилиндрическую систему координат и подставим (5) и выражение для z_1 в (2):

$$S(\hat{o},\hat{z}) = \frac{2(n-1)}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^d \rho d\rho \int_{-(a\rho^2+c)}^{a\rho^2+c} \exp i[-k(n-1) z_1 + (kn - k_3) z - (k_1 \rho\cos\varphi + k_2 \rho \sin\varphi)] dz, \tag{6}$$

причем $\sqrt{k_1^2 + k_2^2} = k\sin\theta_0$, и воспользуемся интегралом Сонина:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[i\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\, \rho\cos(\varphi - \varphi_0)] d\varphi = J_0(\sqrt{k_1^2 + k_2^2}\,\rho) = J_0(\rho k \sin\theta_0),$$

где J_m – функция Бесселя порядка m. Обозначив $k(n-1) + kn - k_3 = k_4$ и $k_3 - k = k_5$, перепишем (6) в виде

$$S(\hat{o},\hat{z}) = \frac{4\pi(n-1)}{V_i(kn - k_3)} \Big\{ \exp(ik_4 c) \int_0^d \exp(ik_4 a\rho^2) \rho J_0(\rho k \sin\theta_0) d\rho - \\ - \exp(ik_5 c) \int_0^d \exp(ik_5 a\rho^2) \rho J_0(\rho k \sin\theta_0) d\rho \Big\}. \tag{7}$$

Возьмем интегралы, входящие в (7), по частям несколько раз и окончательно получим, полагая $n_r \gg n_i$:

$$S(o,z) = \frac{4(n-1)}{kn - k_3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-2ad^2)^{m-1}}{ad^2 + 2c} \, \frac{J_m(kd\sin\theta_0)}{(kd\sin\theta_0)^m} \, i^{m-2} \Big\{ k_4^{m-1} \exp[ik_4(ad^2 + c)] - \\ - k_5^{m-1} \exp[ik_5(ad^2 + c)] \Big\}. \tag{8}$$

Подставляя выражение для z_1 в (3) и (4), вычислим сечения ослабления и поглощения вогнутого диска:

$$\sigma_t = 2\pi \mathrm{Re}\left\{ d^2 + i\exp(iZc)\left[\frac{1-\exp(iZad^2)}{Za}\right]\right\}; \quad Z = 2k(n-1),$$

$$\sigma_a = \frac{4n_r}{(n_r+1)^2 + n_i^2}\,\pi\left\{d^2 - \exp(-Yc)\left[\frac{1-\exp(-Yad^2)}{Ya}\right]\right\}; \quad Y = 4kn_i. \tag{9}$$

При a = 0 выражение (8) описывает угловую зависимость рассеянного излучения для диска. В этом случае все члены ряда, кроме члена с m = 1, обращаются в нуль и функция S имеет вид:

$$S(o,z) = \frac{4(n-1)}{kn-k_3}\;\frac{J_1(kd\sin\theta_0)}{2ckd\sin\theta_0}\left\{\sin[k_4c] - \sin[k_5c]\right\}.$$

Сечения ослабления и поглощения для диска можно найти, взяв отношение производных, стоящих в квадратных скобках.

Рассмотрим некоторые следствия полученных решений. Для определенности подберем такие значения параметров a, c, d, чтобы объем вогнутого диска равнялся среднему объему красной кровяной клетки (эритроцита), приблизительно 94 мкм^3. В этом случае $a = 4\cdot10^{-2}$ мкм$^{-1}$, c = 0,4 мкм, d = 4,373 мкм. Величина Y для эритроцита равна приблизительно 1,52 мкм$^{-1}$. Длина волны падающего излучения берется равной 0,63 мкм. Отсюда видно, что

$$Yc \ll 1, \quad Yad^2 \ll 1,$$

и следовательно, можно воспользоваться разложением в ряд экспонент, входящих в выражения для сечения поглощения вогнутого диска. Подставляя это разложение в (9) и отбрасывая все члены, кроме трех первых, запишем, опуская промежуточные преобразования:

$$\sigma_a = YV/2. \tag{10}$$

Представим изменение формы нашего диска без изменения его объема, например, как показано на рис. 2. При таком изменении концентрация поглощающего вещества внутри частицы (гемоглобина) остается постоянной и, следовательно, Y не изменяется, так как мнимая часть показателя преломления, входящая в Y, пропорциональна концентрации гемоглобина /8/. Тогда из (10) следует, что для слабопоглощающих частиц рассматриваемых форм сечение поглощения не зависит от формы частицы.

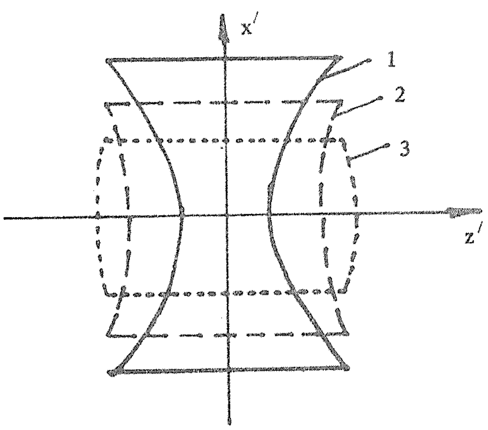

Рис. 2. Изменение формы вогнутого диска без изменения объема: 1 – исходная форма, 2 – промежуточная форма, 3 – выпуклая частица ($c \geqslant l$, $a < 0$).

Другой крайний случай – сильнопоглощающая частица, для которой сечение поглощения пропорционально ее геометрическому сечению в направлении падающего излучения (9):

$$\sigma_a = \left\{ 4n_r / [(n_r + 1)^2 + n_i^2] \right\} \pi d^2 .$$

Зафиксируем объем и будем изменять форму частицы, изменяя параметр c. При этом параметры a и d можно сделать функциями только c. Для этого положим $ad^2 + c = l$ при любых a и d (рис. 2) и вычислим объем вогнутого диска: $V = \pi \left\{ ad^4 + 2cd^2 \right\}$. Получим систему уравнений, из которых определим a и d^2:

$$a = \pi(l - c)(l + c)/V; \quad d^2 = V/\pi(l + c) .$$

Подставив d^2 в (11) найдем, что сечение поглощения обратно пропорционально величине "вогнутости" c. Отметим, что все полученные в работе формулы справедливы и для выпуклых частиц $(a < 0)$, когда $c \geqslant l$.

Рассмотренный пример вогнутого диска позволяет сделать вывод, что поглощающие свойства частицы зависят от ее формы, а поведение сечения поглощения определяется показателем поглощения частицы. Для слабопоглощающих тел сечение поглощения практически не зависит от формы, тогда как в случае сильного поглощения сечение обратно пропорционально величине вогнутости (выпуклости).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лопатин В. Н., Сидько Ф. Я. Оптика и спектроскопия, 61, 430 (1986).
2. Петрушин А. Г. Оптика и спектроскопия, 54, 882 (1983).
3. Barber P., Yeh C. Appl. Optics, 14, № 12, 2864 (1975).
4. Mugnai A., Wiscombe J. Appl. Optics, 25, № 7, 1235 (1986).
5. Reynolds L., Johnson C., Ishimaru A. Appl. Optics, 15, № 9, 2059 (1976).
6. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М., Мир, 1981.
7. Никифоров А. Ф., Уваров В. Б. Основы теории специальных функций. М., Наука, 1974.
8. Tycko O. H. Appl. Optics, 24, № 9, 1355 (1985).

Поступила в редакцию 13 января 1988 г.