УДК 530.145

ЧАСТИЧНО ДИАГОНАЛИЗУЕМЫЕ ГАМИЛЬТОНИАНЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

А.Г. Ушверидзе

Исследованы групповые свойства частично диагонализуемых гамильтонианов в нерелятивистской квантовой механике.

Пусть G – простая алгебра Ли с образующими I^i, $[I^1, I^k] = C^{ik}_l I^l$, $v_{ik}(\lambda)$ – коэфициентные функции классической R-матрицы /1/, удовлетворяющие классическому уравнению треугольников для алгебры G и классическому соотношению унитарности /1/. Эти функции могут быть а) рациональными: $v_{ik}(\lambda) = \lambda^{-1} \times \operatorname{Sp}(I_i I_k)$; б) тригонометрическими: $v_{ik}(\lambda) = \sum_n (\lambda - \omega n)^{-1} \operatorname{Sp}(I_i A^n I_k)$; в) эллиптическими: $v_{ik}(\lambda) = \sum_{n,m} (\lambda - \omega_1 n - \omega_2 m)^{-1} \operatorname{Sp}(I_i A^n B^m I_k)$, $[A, B] = 0$, если $G = sl(N)$. Здесь A и B – кокстеровские автоморфизмы алгебры G. Рассмотрим операторные функции $S_i(\lambda)$, удовлетворяющие уравнениям $[S_i(\lambda), S_k(\mu)] = v_{kl}(\mu - \lambda) C^{ln}_i S_n(\lambda) - v_{il}(\lambda - \mu) C^{ln}_k S_n(\mu)$. В наиболее общем (вырожденном) случае они имеют вид:

$$S_i(\lambda) = \sum_{a=1}^{A} \sum_{n=0}^{N_a} v^{(n)}_{ik}(\lambda, u_a) S^{k,n}_a + \sum_{b=1}^{B} \sum_{m=0}^{M_b} v^{(m)}_{ik}(\lambda, \infty_b) S^{k,m}_b \tag{1}$$

(невырожденный случай соответствует $N_a = 0$, $M_b = -1$). Здесь $v^{(n)}_{ik}(\lambda, u_a)$ и $v^{(m)}_{ik}(\lambda, \infty_b)$ – производные $v_{ik}(\lambda + u)$ по u и $\varphi_b(u)$ (см. ниже) в точках $u = -u_a$ и $u = -\infty_b$. Символ ∞_b указывает на способ стремления $u \to \infty$, при котором $\varphi_b(u) \to 0$. В рациональном случае $B = 1$, $\varphi_1(u) = u^{-1}$, в тригонометрическом – $B = 2$, $\varphi_{1,2}(u) = \exp\{\pm 2\pi i u/\omega h\}$, где h – число Кокстера, а в эллиптическом – $B = 0$. Операторы $S^{k,l}_c$ являются образующими в общем случае бесконечномерных неприводимых представлений алгебр, определяемых коммутационными соотношениями $[S^{k,n}_c, S^{l,m}_c] = C^{kl}_i S^{i,n+m}_c$ и условиями $S^{k,n}_c = 0$, если $n > L_c$. Будем обозначать их через G^{L_c} ($G^0 \equiv G$, $G^{-1} \equiv 0$). Видно, что $[S^2(\lambda), S^2(\mu)] = 0$, где $S^2(\lambda) \equiv S_i(\lambda) \times S^i(\lambda)$, поэтому $S^2(\lambda)$ можно рассматривать как производящую функцию операторов, каждый из которых может быть взят в качестве гамильтониана квазиклассического магнетика на алгебре $G_M = G^{N_1} + \ldots + G^{N_A} + G^{M_1} + \ldots + G^{M_B}$. Собственные значения этих гамильтонианов выражаются через числа λ^j_i ($i = 1, \ldots, M_j$, $j = 1, \ldots$, ранг G) – быстроты, которые можно найти из бетевских уравнений:

$$\sum_{i'j'}{}' (\alpha_j \alpha_{j'}) \Delta(\lambda^j_i - \lambda^{j'}_{i'}) = \Phi_j(\lambda^j_i), \tag{2}$$

$$\Phi_j(\lambda) = \sum_{a=1}^{A} \sum_{n=0}^{N_a} b^{j,n}_a \Delta^{(n)}(\lambda, u_a) + \sum_{b=1}^{B} \sum_{m=0}^{M_b} b^{j,m}_b \Delta^{(m)}(\lambda, \infty_b). \tag{3}$$

Здесь α_i – простые корни алгебры G; $b^{j,n}_a$, $b^{j,m}_b$ – собственные значения (веса) элементов $S^{j,n}_a$, $S^{j,m}_b$, соответствующих элементам $S^j \equiv [S^{\alpha_j}, S^{-\alpha_j}]$ картановской подалгебры алгебры G; $\Delta(\lambda)$ – рациональные, тригонометрические или эллиптические решения скалярного уравнения треугольников /2/; $\Delta^{(n)}(\lambda, u_a)$ и $\Delta^{(m)}(\lambda, \infty_b)$ – их производные по u и $\varphi_b(u)$ в точках $u = -u_a$ и $u = -\infty_b$.

Согласно /2/, точно такие же уравнения возникают при решении точно и квазиточнорешаемых обобщенных уравнений Риккати

$$\sum_j (a_j a_j)\, y'_j(\lambda) + \sum_{i,j} (a_i a_j)\, y_i(\lambda) y_j(\lambda) = \sum_j \Phi_j(\lambda) y_j(\lambda) + C(\lambda), \tag{4}$$

в которых $\Phi_j(\lambda)$ определяется формулой (3), а $C(\lambda)$ находится из условия разрешимости (4) в классе функций вида $y_j(\lambda) = \sum_i \Delta(\lambda - \lambda^j{}_i)$. Это дает возможность для каждой соответствующей (4) простой или обобщенной точно или квазиточнорешаемой шредингеровской задачи указать алгебру G_M, ответственную за точную или квазиточную решаемость. Заметим, однако, что построенные выше алгебры G_M не всегда являются минимальными, так как из-за обращения в нуль некоторых функций $v^{(m)}_{ik}(\lambda, \infty_b)$ не все образующие $S^{k,m}_b$ присутствуют в разложении (1) (например, в рациональном случае отсутствуют $S^{k,0}_b$). Построение минимальных алгебр G^{Lc}_{min} осуществляется выбрасыванием из G^{Lc} отсутствующих в (1) образующих и содержащих их коммутационных соотношений. Обозначая через $N = \sum_{a=1}^{A} (N_a + 1) + \sum_{b=1}^{B} (M_b + 1)$ род частично диагонализуемого гамильтониана, находим, что, например, точно решаемые задачи ($N = 2$, рациональный случай) соответствуют следующим минимальным алгебрам G_M: 1) всевозможные потенциалы Пешля – Теллера – алгебре $sl(2) + sl(2)$, 2) потенциал Морза – алгебре $E(3)$, 3) гармонический осциллятор с центробежным барьером – алгебре $sl(2) + u(1)$, а простой гармонический осциллятор – алгебре с коммутационными соотношениями $[A_i, A_k] = \epsilon_{ikl} B_l$ (здесь и ниже выписываются только отличные от нуля коммутаторы). Этой же алгебре соответствует нелинейное уравнение Шредингера /3/. Аналогично строятся минимальные алгебры для бесконечных серий квазиточнорешаемых моделей. Так, при $N = 3$ (рациональный случай) невырожденные гамильтонианы с эллиптическими потенциалами описываются алгеброй $sl(2) + sl(2) + sl(2)$, а максимально вырожденные на бесконечности гамильтонианы с полиномиальными потенциалами – алгеброй $[A_i, A_k] = \epsilon_{ikl} B_l, [A_i, B_k] = \epsilon_{ikl} C_l$. При $N = 2$ (тригонометрический случай) невырожденные гамильтонианы соответствуют алгебре $sl(2) + sl(2)$, а максимально вырожденные на бесконечности – алгебре $[A, B_\pm] = \mp B_\pm$, $[A, C_\pm] = \pm C_\pm$, которая описывает также модель синус-Гордона /3/. Для многомерных точно и квазиточнорешаемых моделей, способы построения которых даны в /2/, получаем: 1) алгебра $\sum_{i=1}^{N} sl(2)$ описывает задачу о нахождении решений однородного уравнения $(-\Delta_N + \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^{-2})\,\psi(x) = 0$ в классе функций вида $(\prod_{i=1}^{N} x_i^{\sigma_i}) P(x_k^2)$, где P – полиномы; 2) алгебра $\sum_{i=1}^{N-2} sl(2) + sl^2(2)_{min}$ – многомерный гармонический осциллятор с "центробежными барьерами"; 3) алгебра $\sum_{i=1}^{N-3} sl^3(2) + sl^3(2)_{min}$ – квазиточнорешаемые модели с потенциалами типа $V = \sum_i a_i x_i^{-2} + \sum_i \beta_i x_i^2 + r^2 \sum \gamma_i x_i^2 + r^6$, $r^2 = \sum x_i^2$. Более вырожденные на бесконечности случаи описывают конечные серии квазиточнорешаемых сферически несимметричных моделей с потенциальными барьерами и с полиномиальными потенциалами степеней 10, 14, и т.д. Аналогичное рассмотрение возможно и для тригонометрических многомерных квазиточнорешаемых моделей, легко строящихся методами работы /2/, которые мы не выписываем здесь в силу их некоторой громоздкости. Заметим, что все многомерные уравнения Шредингера, о которых шла речь, могут быть легко преобразованы к виду

$$H\psi \equiv \left[P_{ik}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} + Q_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + R(x)\right] \psi(x) = E\psi(x), \tag{5}$$

где $P_{ik}(x)$, $Q_i(x)$ и $R(x)$ – полиномы. Для получения точно решаемых уравнений такого вида для произвольных алгебр Ли можно воспользоваться методом работы /2/, заменив операторы $S_c^{k,l}$, входящие в гамильтониан вполне интегрируемого квазиклассического магнетика, на их дифференциальные представления. Поскольку последние должны содержать всю информацию о (вообще говоря, бесконечномерном) неприводимом представлении алгебры G^{L_c}, то их следует реализовать в виде инфинитезимальных операторов представления соответствующей группы Ли на функциях, зависящих от элементов верхней треугольной матрицы в разложении Гаусса /4/. В этом случае они будут действовать в $D(L_c)$-мерном пространстве, где $D(L_c) = n(n-1)/2$, n – размерность фундаментального представления алгебры G^{L_c}. В результате мы получим оператор H в виде дифференциального оператора второго порядка в D-мерном пространстве, где $D = \sum_{a=1}^{A} D(N_a) + \sum_{b=1}^{B} D(M_b)$. Заметим, что в вышеприведенном рассуждении нигде не была использована квазиклассичность магнетика, поэтому при построении точно решаемых уравнений типа (5) можно исходить и из квантовых магнетиков общего вида, квадратичных по "спиновым" операторам и связанных с решениями квантовых уравнений треугольников. В этом случае нахождение спектров уравнений (5) сводится к решению не квазиклассических, как (2), а обычных, квантовых уравнений анзатца Бете. Для построения квазиточнорешаемых дифференциальных уравнений второго порядка для произвольных алгебр Ли снова можно воспользоваться утверждением работы /2/, согласно которому, если H_0, H_i – набор коммутирующих дифференциальных операторов точно решаемых уравнений вида (5), то оператор $H = H_0 + \sum_i U_i(x) \times (H_i - c_i)$, где $U_i(x)$ – произвольные функции, будет оператором квазиточнорешаемого уравнения. Последнее имеет вид (5), только если функции $U_i(x)$ – полиномы. При наличии вырождения, когда разным собственным функциям соответствуют одинаковые собственные значения операторов H_i, но различные собственные значения оператора H_0, возникает квазиточнорешаемое уравнение, имеющее несколько точно вычисляемых собственных значений. Бесконечные серии таких уравнений со сколь угодно большими точно вычисляемыми участками спектра легко строятся в тригонометрическом и рациональном случаях из-за наличия дополнительных глобальных групп симметрии (в рациональном случае – это сама группа G, а в тригонометрическом – ее максимальная абелева подгруппа). Например, если в невырожденном рациональном случае в качестве H_0 выбрать $S^2(\lambda)$, то, поскольку операторы $\tilde{S}_i \equiv \lim_{\lambda\to\infty} \lambda S_i(\lambda)$ коммутируют с $S^2(\lambda)$ и образуют представление алгебры симметрии G, в качестве операторов H_i можно взять казимиры нормально вложенных подгрупп G, составленных из элементов $\tilde{S}_i$. В тригонометрическом случае операторы H_i можно строить только из элементов картановской подалгебры. Собственные значения этих операторов не зависят от быстрот λ^j_i, а определяются только их количеством, т.е. числами M_j. В результате возникает многомерное квазиточнорешаемое уравнение, параметризованное набором целых чисел. Для каждого фиксированного набора уравнение имеет некоторое количество собственных значений, которые могут быть найдены из уравнений анзатца Бете.

В заключение отметим, что описанный метод позволяет строить точно и квазиточнорешаемые уравнения типа (5), в которых $P_{ik}(x)$, $Q_i(x)$ и $R(x)$ – матричные функции. Для этого некоторые из операторов $S_c^{k,l}$ следует брать в конечномерном матричном представлении. Суперсимметричные обобщения (5) также строятся без труда при замене алгебры на супералгебру и использовании грассмановских переменных при построении дифференциальных форм. Все остальные рассуждения остаются при этом в силе.

Автор благодарен П.Б. Вигману за интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белавин А.А., Дринфельд В.Г. Препринт ИТФ им. Ландау № 18, М., 1982.
2. Ушверидзе А.Г. Краткие сообщения по физике ФИАН, № 2, 40 (1988).
3. Решетихин Н.Ю., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 56, № 3, 323 (1983).
4. Желобенко Д.П. Лекции по теории групп Ли. Дубна, 1965.

Поступила в редакцию 4 марта 1988 г.