*ткие сообщения по физике № 7-1988 г.*

УДК 534.222

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ИДЕАЛЬНОМ ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Е.А. Заболотская

*Теоретически исследован процесс распространения и искажения нормальной волны конечной амплитуды в слое, ограниченном двумя абсолютно жесткими стенками.*

При распространении волн конечной амплитуды в волноводе существенную роль играет дисперсия. Об-зующиеся в волноводе гармонические составляющие распространяются с фазовыми скоростями, отлич-ими от скорости основной компоненты, и их взаимодействие в значительной степени ослаблено. Поэто-/ в акустических волноводах ударные волны не образуются. Исключение составляет прямоугольный лновод или слой, находящийся между двумя абсолютно жесткими или абсолютно мягкими стенками. аспространяясь в таком слое, звуковые волны сильно искажаются и образуют разрывы. Это связано с ратностью собственных значений оператора, описывающего поперечную структуру поля /1/. В этом слу-е в каждой гармонике возбуждается только одна мода, кратная номеру гармоники и номеру моды ос-овной компоненты, так как только эта мода оказывается в синхронизме с рассматриваемой модой ос-овной волны.

В данной работе теоретически исследуется процесс распространения и искажения нормальной акусти-еской волны в нелинейном жидком или газообразном слое, ограниченном двумя абсолютно жесткими тенками. Вычислено расстояние образования разрыва. Полученные результаты сравниваются с данными, риведенными в работе /2/.

Распространение волн конечной амплитуды в слое описывается уравнениями гидродинамики, которые о втором приближении по величине возмущения могут быть сведены к уравнению вида /3/:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \Delta p = \frac{1}{2}\,\Delta\Big(\rho_0 v^2 - \frac{p^2}{\rho_0 c^2}\Big) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Big(\frac{a}{2}\,p^2\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{div}\,\frac{p v}{c^2}\,. \qquad (1)$$

десь p – возмущение давления, связанное с волной; v – колебательная скорость частиц среды; c – ско-ость распространения слабого сигнала в свободном пространстве; $\rho_0$ – равновесная плотность среды; $= \partial^2\rho/\partial p^2$. При вычислении лапласиана и дивергенции нужно иметь ввиду, что ось z направлена вдоль слоя, ось x – поперек слоя, звук возбуждается при всех значениях координаты y. Исключить v из правой асти (1) можно при помощи уравнения Эйлера. Допустим, что при z = 0 возбуждается гармонический сигнал частоты $\omega$. Нелинейность среды приведет к его искажению или обогащению гармониками, поэтому сигнал на любом расстоянии от плоскости z = 0 может быть представлен в виде суммы гармоник

$$p(x, z, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z)\cos(mn\pi x/h)\exp[i(n\omega t - n\kappa_m z)], \qquad (2)$$

где m – номер моды основной компоненты; $\kappa_m^2 = \omega^2/c^2 - m^2\pi^2/h^2$ – волновое число m-ой моды; h – ши-рина слоя.

Напомним, что $\cos(m\pi x/h)$ являются собственными функциями линейного оператора $\Delta_\perp p$ с граничны-ми условиями при $x = 0$ и $x = h$ $\partial p/\partial x = 0$, $m\pi/h$ – его собственные значения. Из последнего выражения видно, что собственные значения кратны. Поэтому в каждой гармонике одна мода, а именно, мода с ном ром $i = mn$ попадает в синхронизм с m-ой модой гармонического сигнала и резонансно возбуждается. Д простоты записи в дальнейшем предполагается, что возбуждается одна мода с $m = 1$, а соответствую волновое число обозначается $\kappa$. В этом случае в каждой гармонике возбуждается одна мода, совпадающ с номером гармоники.

При выводе укороченных уравнений для медленно изменяющихся амплитуд гармоник нужно умн жить правую и левую части каждого уравнения на соответствующую собственную функцию и проинте рировать по слою. В силу ортогональности собственных функций вклад в правую часть соответс вующего укороченного уравнения внесут только те члены, которые в результате взаимодействия обра ют моду, совпадающую с модой рассматриваемой гармоники. Например, распределение поля n-ой гарм нической составляющей определяется собственной функцией $\cos(n\pi x/h)$, поэтому при вычислении нел нейной части укороченного уравнения для n-ой гармоники нужно учитывать лишь те взаимодействия, к торые могут дать $\cos(n\pi x/h)$.

Анализ взаимодействий различных гармоник позволяет написать систему n уравнений для медлен изменяющихся амплитуд гармонических составляющих:

$$2in\kappa \frac{dA_n}{\partial z} = -\frac{n^2\omega^2}{4\rho_0 c^4}(\gamma+1)\sum_{n'=-\infty}^{\infty} A_{n'}A_{n-n'}, \quad (\,$$

где $\gamma$ — показатель адиабаты в уравнении состояния. Заметим, что $A_{-n}(z) = A_n^*(z)$, где * означает ком лексное сопряжение. Заменяя $n\omega$ на $\partial/\partial\tau$, можно свернуть систему n обыкновенных уравнений (3) в од уравнение в частных производных для функции $P(z,\tau)$, которая совпадает с функцией $p(x, z, \tau)$ при $x = 0$, $p(0, z, \tau) = P(z, \tau)$:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\tau\partial z} - \frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 P^2}{\partial\tau^2} = 0. \quad (\,$$

Здесь $\tau = t - z/c_{ph}$; $\beta = (\gamma+1)c_{ph}/4\rho_0 c^4$, $c_{ph}$ — фазовая скорость рассматриваемой моды основной ком ненты; $\kappa = \omega/c_{ph}$. Функция $P(z,\tau)$ описывает форму волны в сечении волновода $x = 0$.

Уравнение (4) можно один раз проинтегрировать по $\tau$. Если положить произвольную функцию по равной нулю, что соответствует исключению из рассмотрения решений, характеризуемых возникновение постоянной составляющей, то уравнение для функции $P(z,\tau)$ примет вид:

$$\frac{\partial P}{\partial z} - \beta P\frac{\partial P}{\partial\tau} = 0.$$

Это уравнение хорошо известно в нелинейной акустике /4/. Его решение записывается в виде неявной фу кции

$$\tau = -\beta z P + \Phi(P), \quad (\,$$

где $\Phi(P)$ — произвольная функция, определяемая граничными условиями. Решение (5) описывает нел нейное искажение сигнала при распространении и позволяет определить расстояние образования разры $L_d$. Для первоначально гармонической волны с амплитудой A и частотой $\omega$ это расстояние равно

$$L_p = 1/\beta\omega A = 2L_d^0 c/c_{ph}, \quad (\,$$

где $L_d^0$ — расстояние образования разрыва в плоской гармонической волне, распространяющейся в свобо ном пространстве.

Приведенный здесь результат (6) был получен ранее в /2/ другим способом. В /2/ представление простых волн обобщается на случай волн, распространяющихся в ограниченных объемах (резонаторах, волноводах). При модовом подходе выявляется причина сильного искажения волн. Выражение (6), полученное при модовом подходе, справедливо для любой точки поперечного сечения.

Зная форму волны при $x = 0$, можно построить волновой профиль в любой точке поперечного сечения $x$. Действительно, выражение (2) можно представить в виде:

$$p(t, x, z) = \frac{1}{2} \sum_n A(z) e^{-in\kappa z} \left(e^{in(\omega t + \pi x/h)} + e^{in(\omega t - \pi x/h)}\right).$$

Отсюда получаем $p = f_1(t + \pi x/h\omega, z) + f_2(t - \pi x/h\omega, z)$, где $f_1$ и $f_2$ – произвольные функции, удовлетворяющие условию: $x = 0$, $f_1(t, z) = f_2(t, z) = \frac{1}{2} P(z, t)$.

Таким образом, по известному волновому профилю в сечении $x = 0$ можно построить форму сигнала в любой точке поперечного сечения. Для этого нужно сложить два волновых профиля, каждый из которых сдвинут на величину $\pi x/h$ соответственно вперед и назад относительно волнового профиля при $x = 0$. Заметим, что на оси $(x = h/2)$ будет периодический сигнал удвоенной частоты. В частности, если ударный фронт уже сформировался, то на оси будет пилообразный волновой профиль удвоенной частоты.

Автор искренне благодарна Ф.В. Бункину за обсуждение работы.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Исакович М.А. Общая акустика. М., Наука, 1973.
2. Канер В.В., Руденко О.В. Вестник МГУ, сер. физика, астрономия, **19**, № 4, 78 (1978).
3. Заболотская Е.А., Шварцбург А.Б. Акуст.ж., **33**, в. 2, 373 (1987).
4. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975.


Институт общей физики АН СССР

Поступила в редакцию 10 марта 1988 г.