Краткие сообщения по физике № 7-1988 г.

УДК 530.146.6

ОБ ЭНЕРГИИ СВЯЗИ n ЧАСТИЦ В ПРЕДЕЛЕ БОЛЬШИХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

А. Гонсалес*

Показано, что в пределе больших размерностей энергия основного состояния системы n идентичных бесспиновых частиц выражается в универсальном виде через энергию двух частиц.

Более двадцати лет назад Посту /1/ были известны неравенства

$$E_n(g) \geqslant (n-1)\,E_2\,(ng/2)\,, \tag{1}$$

где E_n – энергия основного состояния системы n идентичных бесспиновых частиц, g – константа связи. С помощью простых вариационных оценок на нескольких примерах он убедился, что правая часть (1) является хорошим приближением к истинной энергии независимо от конкретного вида парного потенциала взаимодействия. Причина такой универсальности оставалась непонятной. Она не связана с известным источником универсальности в системе нескольких частиц – резонансом /2/, т.к. это последнее явление имеет место вблизи двухчастичного порога, в то время как соотношения (1) дают энергию в большом диапазоне констант связи, особенно при больших g.

В данной работе проведено вычисление $E_n(g)$ с помощью 1/N – разложения, где роль N играет размерность пространства d. В первом приближении получаем равенства Поста (знак равенства в (1)). Это пример того, что в пределе больших N не только упрощается квантовая динамика /3/, но и устанавливаются универсальные соотношения. При d = 3 поправки к главному члену ряда слабо нарушают указанную универсальность.

Рассмотрим систему n тождественных бесспиновых частиц в пространстве размерности $d \gg 1$. Для осуществления предела $d \to \infty$ необходима перенормировка гамильтониана. Это видно из того, что кинетическая энергия растет как d и наивный предел $d \to \infty$ дает свободную теорию. Введем новые переменные $r \to \sqrt{d}\,r'$, $p \to \sqrt{d}\,p'$ и переопределим константу связи таким образом, чтобы $\hat{H}_n(\hat{p}, r) = d\hat{h}_n(\hat{p}', r')$, где теперь $\hat{h}_n$ не зависит от d. Тогда 1/d – разложение для энергии имеет вид

$$E_n(g) = d\,\epsilon_n^{(0)}(g) + \epsilon_n^{(1)}(g) + O(d^{-1/2})\,, \tag{2}$$

где согласно /3/, $\epsilon_n^{(0)}(g) = \min\limits_{\{w,v\}} h_n(w,v;g) = \min\limits_{\{w,v\}} \langle w,v\,|\,\hat{h}_n\,|w,v\rangle$, а когерентные состояния $|w,v\rangle$ аналогичны тем, которые возникают в квазиклассическом пределе $\hbar \to 0$. Состояния $|w,v\rangle$ однозначно параметризуются матрицами $w_{\alpha\beta}$ и $v_{\alpha\beta}$, которые играют роль канонических координат и импульсов. Здесь индексы α, β пробегают значения от 1 до n – 1 и нумеруют переменные Якоби. Матрицы w,v симметричны, а w – положительно определена. Средние значения квадратичных O(d) – инвариантных операторов выражаются через w и v следующим образом:

$$\langle w,v\,|\,r_\alpha r_\beta\,|\,w,v\rangle = w_{\alpha\beta};\ \langle w,v\,|\,\frac{1}{2}\,(r_\alpha\hat{p}_\beta + \hat{p}_\beta r_\alpha)\,|\,w,v\rangle = (w\,v)_{\alpha\beta};\ \langle w,v\,|\,\frac{1}{2}\,\hat{p}_\alpha\hat{p}_\beta\,|\,w,v\rangle =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\,vwv + \frac{1}{8}\,w^{-1}\right)_{\alpha\beta}.$$

В системе единиц, где $\hbar = m = 1$ двухчастичный классический гамильтониан имеет вид $h_2(w,v;g) = vwv + 1/4\,w + gV(w)$. В этом случае w и v просто числа, причем $w > 0$. Минимум по v достигается при v = 0.

Покажем теперь, что задача нахождения минимума h_n сводится к задаче минимизации h_2. Для трех частиц имеем

---

* Институт кибернетики, математики и физики АН Кубы, Гавана.

$$h_3(w,0;g) = (1/8)(w_r w_\rho - w_{r\rho}{}^2)^{-1}(w_r/\mu + w_\rho/m) + g[V(w_r) + V(w_\rho + w_{r\rho} + W_r/4) + +V(w_\rho - w_{r\rho} + W_r/4)], \qquad (3)$$

где приведенные массы $m = 1/2$, $\mu = 2/3$ и матричные элементы $w_r = r^2$, $w_\rho = \rho^2$, $w_{r\rho} = r\vec{\rho}$ соответствуют координатам Якоби $r = r_1 - r_2$, $\vec{\rho} = r_3 - (r_1 + r_2)/2$. Гамильтониан (3) инвариантен относительно перестановок частиц. Будем предполагать, что его минимум находится среди конфигураций максимальной симметрии, т. е. он также инвариантен относительно перестановок. При перестановке частиц 1 и $2w_{r\rho}$ меняет знак, поэтому в минимуме $w_{r\rho} = 0$. Аналогичным образом инвариантность при перестановке частиц 1 и 3, 2 и 3 требует $w_\rho = 3w_r/4$. В итоге, будем искать минимум в классе $\overline{w} = \{w_r, w_\rho = 3w_r/4, w_{r\rho} = 0\}$. При этом

$$h_3(\overline{w},0;g) = 1/2w_r + 3gV(w_r) = 2h_2(w_r,0;3g/2)$$

откуда получаем равенство Поста $\epsilon_3{}^{(0)}(g) = 2\epsilon_2{}^{(0)}(3/2g)$. Можно повторить предыдущие рассуждения для любого n. В общем случае получаем $h_n(\overline{w},0;g) = (n-1)\,h_2(w_r,0;\,ng/2)$, откуда следуют равенства (1).

При $d = 3$ поправки к первому члену ряда (2) нельзя считать малым. При их учете ограничимся случаями $n = 2$ и 3. Второй член в (2) имеет вид

$$\epsilon_n{}^{(1)}(g) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n(n-1)/2} \lambda_i - \frac{1}{2}(n-1)\,n w_0{}^{-1}, \qquad (4)$$

где λ_i – частоты малых колебаний вокруг минимума, w_0 – значение w_r в минимуме. Формулу (4) можно получить операторным методом /4/. Для $n = 2$ имеем $\lambda = 2\,(1 + 3w_0{}^3 gV''(w_0))^{1/2}/w_0$, а для $n = 3$ $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 2(1 + (3w_0{}^3/2)gV''(w_0))^{1/2}/w_0$. Отметим, что в предположении о том, что двухчастичный минимум устойчив ($\lambda^2 > 0$), трехчастичный минимум также устойчив ($\lambda_i^2 > 0$). Тогда, если учесть только первые два члена разложения (2), получаем:

$$\frac{E_3(g)}{2E_2(3g/2)} = \frac{2d\epsilon_2{}^{(0)}(3g/2) + 2(\lambda/2 - w_0{}^{-1}) + [\lambda_2 - \lambda/2 - 1/w_0]}{2d\epsilon_2{}^{(0)}(3g/2) + 2(\lambda/2 - 1/w_0)}. \qquad (5)$$

Величина в квадратных скобках оказывается малой по сравнению с $2E_2(3g/2)$. Для короткодействующих, несингулярных в нуле потенциалов отношение (5) близко к единице уже при двухчастичном пороге (для $V(w) = -\exp(-w)$ оно равно 0,98) и точно стремится к единице при $g \to \infty$. Для синулярных потенциалов (Хюльтена, Юкавы) ситуация немного хуже. Отношение порядка 0,9 при $g = g_2$ и 0,97 в режиме сильной связи.

Таким образом, $1/d$ – разложение устроено так, что даже при $d = 3$ поправки слабо влияют на отношение (5). Поэтому источником универсальности в системе нескольких идентичных частиц следует считать "большую" размерность пространства. Естественно ожидать, что указанная универсальность проявится и в задачах рассеяния.

Автор благодарен Д.А. Киржницу, С.М. Апенко и В.В. Лосякову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall R.L., Post H.R. Proc. Phys. Soc. 90, 381 (1967).
2. Ефимов В. ЯФ, 29, 1058 (1979).
3. Yaffe L.G. Rev. Mod. Phys., 54, 407 (1982).
4. Mlodinow L.D., Papanicolau N. Ann. Phys. (NY), 128, 314 (1980); 131, 1 (1981).

Поступила в редакцию 19 апреля 1988 г.